Даны координаты пирамиды: A1(0,1,-2), A2(2,1,-1), A3(1,1,-4), A4(3,-1,-3)  
**1) Координаты векторов**.  
Координаты векторов находим по формуле:  
X = xj - xi; Y = yj - yi; Z = zj - zi  
здесь X,Y,Z координаты вектора; xi, yi, zi - координаты точки Аi; xj, yj, zj - координаты точки Аj;  
Например, для вектора A1A2  
X = x2 - x1; Y = y2 - y1; Z = z2 - z1  
X = 2-0; Y = 1-1; Z = -1-(-2)  
A1A2(2;0;1)  
A1A3(1;0;-2)  
A1A4(3;-2;-1)  
A2A3(-1;0;-3)  
A2A4(1;-2;-2)  
A3A4(2;-2;1)  
**2) Модули векторов** (длина ребер пирамиды)  
Длина вектора a(X;Y;Z) выражается через его координаты формулой:  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=|a|%20=%20\sqrt%7bX%5e%7b2%7d%20%2B%20Y%5e%7b2%7d%20%2B%20Z%5e%7b2%7d%7d  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=|A_%7b1%7dA_%7b2%7d|%20=%20\sqrt%7b2%5e%7b2%7d%20%2B%200%5e%7b2%7d%20%2B%201%5e%7b2%7d%7d%20=%20\sqrt%7b5%7d%20=%202.236  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=|A_%7b1%7dA_%7b3%7d|%20=%20\sqrt%7b1%5e%7b2%7d%20%2B%200%5e%7b2%7d%20%2B%202%5e%7b2%7d%7d%20=%20\sqrt%7b5%7d%20=%202.236  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=|A_%7b1%7dA_%7b4%7d|%20=%20\sqrt%7b3%5e%7b2%7d%20%2B%202%5e%7b2%7d%20%2B%201%5e%7b2%7d%7d%20=%20\sqrt%7b14%7d%20=%203.742  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=|A_%7b2%7dA_%7b3%7d|%20=%20\sqrt%7b1%5e%7b2%7d%20%2B%200%5e%7b2%7d%20%2B%203%5e%7b2%7d%7d%20=%20\sqrt%7b10%7d%20=%203.162  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=|A_%7b2%7dA_%7b4%7d|%20=%20\sqrt%7b1%5e%7b2%7d%20%2B%202%5e%7b2%7d%20%2B%202%5e%7b2%7d%7d%20=%20\sqrt%7b9%7d%20=%203  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=|A_%7b3%7dA_%7b4%7d|%20=%20\sqrt%7b2%5e%7b2%7d%20%2B%202%5e%7b2%7d%20%2B%201%5e%7b2%7d%7d%20=%20\sqrt%7b9%7d%20=%203  
**3) Угол между ребрами**.  
Угол между векторами a1(X1;Y1;Z1), a2(X2;Y2;Z2) можно найти по формуле:  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=cos%20\gamma%20%20%20=%20\frac%7ba_%7b1%7da_%7b2%7d%7d%7b|a_%7b1%7d|\cdot%20|a_%7b2%7d|%7d  
где a1a2 = X1X2 + Y1Y2 + Z1Z2  
Найдем угол между ребрами A1A2(2;0;1) и A1A3(1;0;-2):  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=cos%20\gamma%20%20%20=%20\frac%7b2\cdot%201%20%2B%200\cdot%200%20%2B%201(-2)%7d%7b\sqrt%7b5%7d\cdot%20\sqrt%7b5%7d%7d%20=%200  
γ = arccos(0) = 90.0000  
**4) Площадь грани**  
Площадь грани можно найти по формуле:  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=S%20=%20\frac%7b1%7d%7b2%7d%20|a|\cdot%20|b|%20sin%20\gamma  
где  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=sin%20\gamma%20%20=%20\sqrt%7b1%20-%20cos%20\gamma%5e%7b2%7d%7d  
Найдем площадь грани A1A2A3  
Найдем угол между ребрами A1A2(2;0;1) и A1A3(1;0;-2):  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=cos%20\gamma%20%20%20=%20\frac%7b2\cdot%201%20%2B%200\cdot%200%20%2B%201(-2)%7d%7b\sqrt%7b5%7d\cdot%20\sqrt%7b5%7d%7d%20=%200  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=sin%20\gamma%20%20=%20\sqrt%7b1%20-%200%5e%7b2%7d%7d%20=%201  
Площадь грани A1A2A3  
  
Найдем площадь грани с учётом геометрического смысла векторного произведения:  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=S%20=%20\frac%7b1%7d%7b2%7d%20|\overline%7bA_%7b1%7dA_%7b2%7d%7d%20x%20\overline%7bA_%7b1%7dA_%7b3%7d%7d|  
Векторное произведение:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | i | j | k | | 2 | 0 | 1 | | 1 | 0 | -2 | |  | | = |

= i(0 • (-2)-0 • 1) - j(2 • (-2)-1 • 1) + k(2 • 0-1 • 0) = 5j  
  
**5) Объем пирамиды**.  
Объем пирамиды, построенный на векторах a1(X1;Y1;Z1), a2(X2;Y2;Z2), a3(X3;Y3;Z3) равен:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=V%20=%20\frac%7b1%7d%7b6%7d | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | X1 | Y1 | Z1 | | X2 | Y2 | Z2 | | X3 | Y3 | Z3 | |  | |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=V%20=%20\frac%7b1%7d%7b6%7d | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 2 | 0 | 1 | | 1 | 0 | -2 | | 3 | -2 | -1 | |  | | https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=%20=%20\frac%7b10%7d%7b6%7d%20=%201.667 |

Находим определитель матрицы  
∆ = 2 • (0 • (-1)-(-2) • (-2))-1 • (0 • (-1)-(-2) • 1)+3 • (0 • (-2)-0 • 1) = -10  
**7) Уравнение прямой**  
Прямая, проходящая через точки A1(x1; y1; z1) и A2(x2; y2; z2), представляется уравнениями:  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7bx%20-%20x_%7b1%7d%7d%7bx_%7b2%7d%20-%20x_%7b1%7d%7d%20=%20\frac%7by%20-%20y_%7b1%7d%7d%7by_%7b2%7d%20-%20y_%7b1%7d%7d%20=%20\frac%7bz%20-%20z_%7b1%7d%7d%7bz_%7b2%7d%20-%20z_%7b1%7d%7d  
Уравнение прямой A1A2(2,0,1)  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7bx%20-%200%7d%7b2%7d%20=%20\frac%7by%20-%201%7d%7b0%7d%20=%20\frac%7bz%20%2B%202%7d%7b1%7d  
Уравнение прямой A1A4(3,-2,-1)  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7bx%20-%200%7d%7b3%7d%20=%20\frac%7by%20-%201%7d%7b-2%7d%20=%20\frac%7bz%20%2B%202%7d%7b-1%7d  
**8) Уравнение плоскости**.  
Если точки A1(x1; y1; z1), A2(x2; y2; z2), A3(x3; y3; z3) не лежат на одной прямой, то проходящая через них плоскость представляется уравнением:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | x-x1 | y-y1 | z-z1 | | x2-x1 | y2-y1 | z2-z1 | | x3-x1 | y3-y1 | z3-z1 | |  | | = 0 |

Уравнение плоскости A1A2A3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | x-0 | y-1 | z+2 | | 2 | 0 | 1 | | 1 | 0 | -2 | |  | | = 0 |

(x-0)(0 • (-2)-0 • 1) - (y-1)(2 • (-2)-1 • 1) + (z+2)(2 • 0-1 • 0) = 5y-5 = 0  
Упростим выражение: y-1 = 0  
**10) Длина высоты пирамиды, проведенной из вершины A4(3,-1,-3)**  
Расстояние d от точки M1(x1;y1;z1) до плоскости Ax + By + Cz + D = 0 равно абсолютному значению величины:  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=d%20=%20\frac%7b|A%20x_%7b1%7d%20%2B%20B%20y_%7b1%7d%20%2B%20C%20z_%7b1%7d%20%2B%20D|%7d%7b\sqrt%7bA%5e%7b2%7d%20%2B%20B%5e%7b2%7d%20%2B%20C%5e%7b2%7d%7d%7d  
Уравнение плоскости A1A2A3: y-1 = 0  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=d%20=%20\frac%7b|0\cdot%203%20%2B%201(-1)%20%2B%200(-3)%20-%201|%7d%7b\sqrt%7b0%5e%7b2%7d%20%2B%201%5e%7b2%7d%20%2B%200%5e%7b2%7d%7d%7d  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=d%20=%20\frac%7b2%7d%7b\sqrt%7b1%7d%7d%20=%202  
**11) Уравнение высоты пирамиды через вершину A4(3,-1,-3)**  
Прямая, проходящая через точку M0(x0;y0;z0) и перпендикулярная плоскости Ax + By + Cz + D = 0 имеет направляющий вектор (A;B;C) и, значит, представляется симметричными уравнениями:  
Уравнение плоскости A1A2A3: y-1 = 0  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7bx%20-%20x_%7b0%7d%7d%7bA%7d%20=%20\frac%7by%20-%20y_%7b0%7d%7d%7bB%7d%20=%20\frac%7bz%20-%20z_%7b0%7d%7d%7bC%7d  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7bx%20-%203%7d%7b0%7d%20=%20\frac%7by%20-%20(-1)%7d%7b1%7d%20=%20\frac%7bz%20-%20(-3)%7d%7b0%7d  
**12) Угол между прямой A1A4 и плоскостью A1A2A3**.  
Синус угла между прямой с направляющими коэффициентами (l; m; n) и плоскостью с нормальным вектором N(A; B; C) можно найти по формуле:  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=sin%20\gamma%20%20%20=%20\frac%7b|Al%20%2B%20Bm%20%2B%20Cn|%7d%7b\sqrt%7bA%5e%7b2%7d%20%2B%20B%5e%7b2%7d%20%2B%20C%5e%7b2%7d%7d\sqrt%7bl%5e%7b2%7d%20%2B%20m%5e%7b2%7d%20%2B%20n%5e%7b2%7d%7d%7d  
Уравнение плоскости A1A2A3: y-1 = 0  
Уравнение прямой A1A4:  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7bx%20-%200%7d%7b3%7d%20=%20\frac%7by%20-%201%7d%7b-2%7d%20=%20\frac%7bz%20%2B%202%7d%7b-1%7d  
  
γ = arcsin(0.535) = 32.345o