Исследовать функцию и построить её график $y = x^3 - 6x^2 + 16$.

1) Область определения: Т.к. функция непрерывна на (–∞; +∞), то $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2) Четность, нечетность, периодичность. Функция общего вида, не периодическая.

3) Точки пересечения графика с осями координат.

Точка пересечения с осью Oy – (0; 16).

Чтобы найти точи пересечения с осью Ox, надо решить уравнение $x^3 - 6x^2 + 16 = 0$. Т.к. коэффициент при старшем члене этого уравнения равен 1, то свободный член этого уравнения равен произведению корней с обратным знаком: $x_1 x_2 x_3 = -16$, где x_1, x_2, x_3 – корни уравнения $x^3 - 6x^2 + 16 = 0$. Поэтому естественно поискать корни этого уравнения среди делителей свободного члена, каковыми являются –16, –8, –4, –2, –1, 1, 2, 4, 8, 16. Легко убедиться, что только $x_1 = 2$ является корнем этого уравнения, и поэтому многочлен $x^3 - 6x^2 + 16 = 0$ делится нацело на одночлен $x - 2$:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 6x^2 + 16 & x - 2 \\
\underline{x^3 - 2x^2} & \overline{x^2 - 4x - 8} \\
-4x^2 + 16 & \\
\underline{-4x^2 + 8x} & \\
-8x + 16 & \\
-8x + 16 &
\end{array}
$$

Таким образом, $x^3 - 6x^2 + 16 = (x-2)(x^2 - 4x - 8)$, и чтобы найти остальные точки пересечения графика функции с осью Ox, нужно решить уравнение

$x^2 - 4x - 8 = 0$. $D = 4^2 + 4 \cdot 8 = 48$; $\sqrt{D} = 4\sqrt{3}$;

$x_2 = \dfrac{4 - 4\sqrt{3}}{2} = 2 - 2\sqrt{3}$, $x_3 = \dfrac{4 + 4\sqrt{3}}{2} = 2 + 2\sqrt{3}$.

Возможно, вы не изучали деление многочленов углом, но знаете теорему Виета для уравнений степени выше 2-й. По этой теореме для корней x_1, x_2, x_3 уравнения $x^3 - 6x^2 + 16 = 0$ выполняются условия: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 0 \\ x_1 x_2 x_3 = -16 \end{cases}$. Один из корней $x_1 = 2$ нам известен. Поэтому $\begin{cases} 2 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_2 + 2x_3 + x_2 x_3 = 0 \\ 2x_2 x_3 = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 x_3 = -8 \end{cases}$, и по теореме Виета для квадратного уравнения, x_2, x_3 – корни уравнения $x^2 - 4x - 8 = 0$.

Если вы и теорему Виета для уравнений степени выше 2-й не изучали, то остаётся только метод неопределённых коэффициентов:

$$x^3 - 6x^2 + 16 = (x-2)(Ax^2 + Bx + C), \text{ отсюда}$$

$$x^3 - 6x^2 + 16 = Ax^3 + (-2A + B)x^2 + (-2B + 2C)x - 2C,$$

$\begin{cases} A = 1 \\ -2 + B = -6 \\ -2B + C = 0 \\ -2C = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -4 \\ 8 + C = 0 \\ C = -8 \end{cases}$ и $Ax^2 + Bx + C = x^2 - 4x - 8$.

4) Найти асимптоты графика;

Т.к. функция непрерывна на (–∞; +∞), то вертикальных асимптот нет.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-6x^2+16}{x}=+\infty$ – наклонных и горизонтальных асимптот нет.

5) Промежутки монотонности и экстремумы. $y'=3x^2-12x$.

$3x^2-12x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0$; $x_1=0$, $x_2=4$. x_1 и x_2 – критические точки.

Составим таблицу:

x	$(-\infty;\,0)$	$(0;\,4)$	$(4;\,+\infty)$
y'	+ положительная (>0)	– отрицательная (>0)	+ положительная (>0)
y	$\uparrow$ возрастает	$\downarrow$ убывает	$\uparrow$ возрастает

$y(0)=16$; $y(4)=4^3-6\cdot4^2+16=-16$;

Из таблицы видно, что точка $(0;16)$ – точка локального максимума, а точка $(4;-16)$ – точка локального минимума.

6) Выпуклость, вогнутость, точки перегиба;

$y''=(3x^2-12x)'=6x-12$.

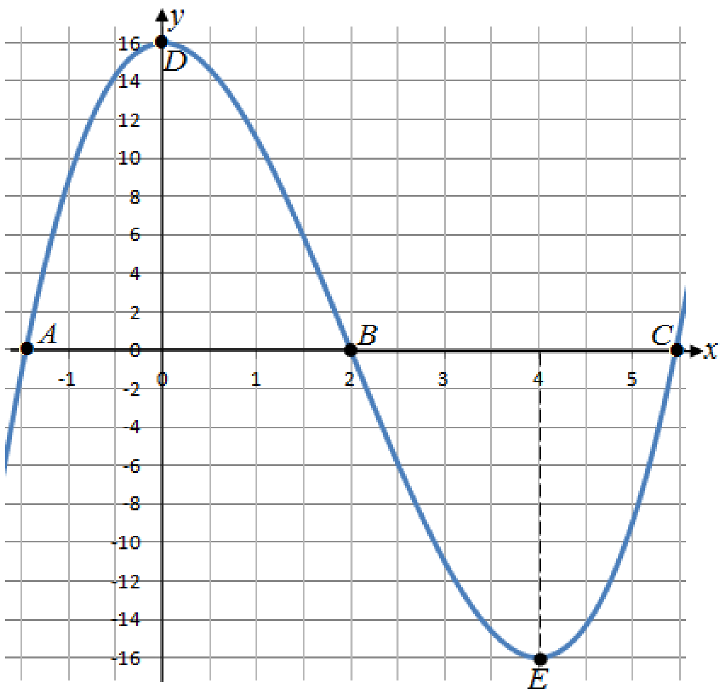
$6x-12=0 \Leftrightarrow x=2$, т.е. единственной точкой перегиба может быть точка $x=2$.

$y(2)=2^3-6\cdot2^2+16=0$.

Составим ещё одну таблицу:

x	$(-\infty;\,2)$	$(1;\,+\infty)$
y''	– отрицательная (<0))	+ положительная (>0)
y	$\cap$ выпукла	$\cup$ вогнута

Из этой таблицы видно, что при переходе через точку $x=2$ функция меняет выпуклость на вогнутость, т.е. в этой точке у функции действительно перегиб (кривая переходит с одной стороны касательной на другую.



7) Построение графика. Точки $A(2-\sqrt{2};\ 0)$, $B(2;\ 0)$ и $C(2+\sqrt{2};\ 0)$ – точки пересечения с осью Ox, при этом точка $B(2;\ 0)$ ещё и точка перегиба. $D(0;\ 16)$ – точка локального максимума и точка пересечения с осью Oy, $E(4;\ –16)$ – точка локального минимума. Функция возрастает на интервалах $(-\infty;\ 0)$ и $(4;\ +\infty)$, убывает на $(0;\ 4)$.