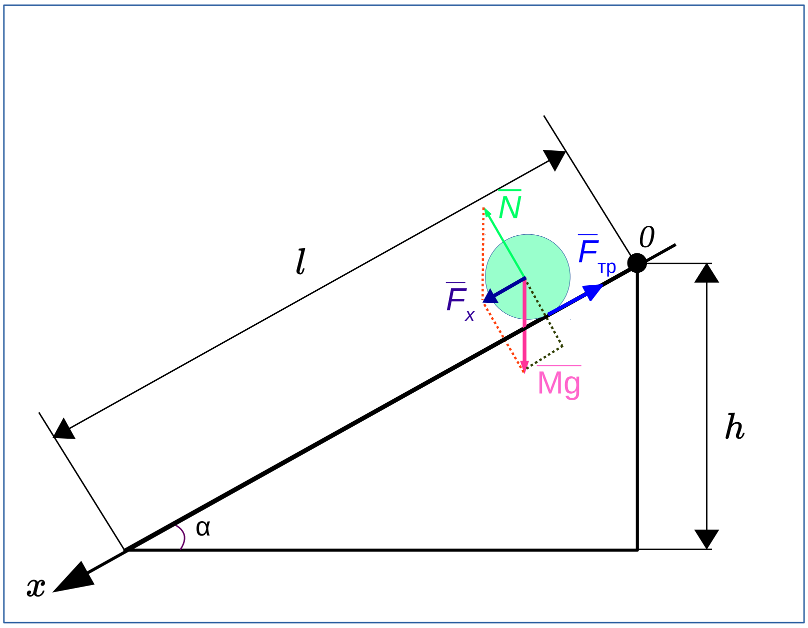

Рисунок 1: Скатывание тела с наклонной плоскости

Задача

С наклонной плоскости, составляющей угол 30° , скатывается шар, диск и обруч. Длина наклонной плоскости 4 см. Пренебрегая трением, определить:

1) линейные ускорения движения центров массы скатывающихся тел;

2) время скатывания каждого тела;

3) скорость каждого тела в конце наклонной плоскости.

Воспользоваться законом сохранения энергии.

Дано:

$l = 4см = 0{,}04\ м$

$\alpha = 30^o$

Ну вообще-то без трения тела бы не скатывались, а соскальзывали. Ладно, просто пренебрежем потерями.

РЕШЕНИЕ

Сразу вычислим высоту h

$h = l \cdot \sin\alpha = 0{,}02\ м$

Согласно закону сохранения энергии. Вся начальная потенциальная энергия $E_p = mgh$ перейдет в кинетическую, которая с учетом вращения тел будет состоять из двух компонент: кинетической энергии поступательного движения $E_k = \frac{mv^2}{2}$ и кинетической энергии вращательного движения $E_{вр} = \frac{I\omega^2}{2}$. (*Кто не в курсе что такое момент инерции **I** и угловая скорость **ω**, просмотрите тему «Динамика вращательного* *движения»*).

Итак, получаем исходное уравнение

$$mgh=\frac{mv^2}{2}+\frac{I\omega^2}{2} \quad (1)$$

Для обруча, диска (можно цилиндра), шара будут разные моменты инерции относительно оси вращения.

Так для тонкого обруча радиусом R :

$$I=mR^2 \qquad (2)$$

Для диска радиусом R:

$$I=\frac{mR^2}{2} \qquad (3)$$

Для шара радиусом R:

$$I=\frac{2}{5}mR^2 \qquad (4)$$

Заметим, это моменты инерции относительно осей, совпадающих с осями симметрии данных фигур. Относительно других осей значения будут иными.

Хорошо, далее выражаем угловую скорость вращения через линейную скорость движения центра масс фигур. (в нашем случае он расположен на оси)

$$\omega=\frac{v}{2\pi R} \quad (5)$$

(один оборот соответствует продвижению на расстояние 2πR).

Тогда, с учетом (2) и (5) закон сохранения (1) для обруча принимает вид:

$$mgh=\frac{mv^2}{2}+\frac{1}{2}\cdot mR^2\cdot\left(\frac{v}{2\pi R}\right)^2$$

Преобразуем, сократим обе части на *m, R* тоже сократится.

$$gh=\frac{v^2}{2}+\left(\frac{v^2}{8\pi^2}\right)=\frac{v^2}{2}\left(1+\frac{1}{4\pi^2}\right) \quad (6)$$

Теперь из (6) можно найти скорость обруча после скатывания

$$v=\sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{1}{4\pi^2}}} \qquad (7)$$

Принияв *g≈9,8 м/с²*, подставляем числа и получаем:

$$v=\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}8\cdot 0{,}02}{1+\frac{1}{4\pi^2}}}\approx 0{,}618[м/с] \qquad (8)$$

Аналогичным образом для диска из (1), (3), (5) получаем:

$$mgh=\frac{mv^2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{mR^2}{2}\cdot\left(\frac{v}{2\pi R}\right)^2$$

$$gh=\frac{v^2}{2}\left(1+\frac{1}{8\pi^2}\right) \qquad (9)$$

$$v=\sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{1}{8\pi^2}}} \qquad (10)$$

$$v=\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}8\cdot 0{,}02}{1+\frac{1}{8\pi^2}}}\approx 0{,}622[м/с] \qquad (11)$$

Для шара из (1), (4), (5) получаем:

$$mgh=\frac{mv^2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2mR^2}{5}\cdot\left(\frac{v}{2\pi R}\right)^2$$

$$gh=\frac{v^2}{2}\left(1+\frac{1}{10\pi^2}\right) \qquad (12)$$

$$v=\sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{1}{10\pi^2}}} \qquad (13)$$

$$v=\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}8\cdot 0{,}02}{1+\frac{1}{10\pi^2}}}\approx 0{,}623[м/с] \qquad (14)$$

Глядя на результаты (8), (11), (14), видим, что разница невелика. Возможно изначально в условии было 4м, а вопрошающий ошибся, но я думаю, имея готовые формулы, можно легко *пересчитать все необходимые величины с учетом новой длины* l.

Далее необходимо найти ускорение и время скатывания.

Тут нам понадобится система координат. Ось *x* направим вдоль наклонной плоскости, начало координат на вершине плоскости (точка начала движения) (см рисунок).

Допустим движение центра масс равноускоренное. Тогда его скорость *v* будет зависеть от времени *t* (с учетом того, что начальная скорость равна 0) следующим образом:

$$v=at \qquad (15)$$

где a есть ускорение.

Его координата x зависит от времени

$$x=\frac{at^2}{2} \qquad (16)$$

Теперь если подставить в (15) конечную скорость при скатывании, а в (16) $x=l$, получаем систему из 2-х уравнений с 2-мя неизвестными a, t.

$$\begin{cases} at=v \\ \frac{at^2}{2}=l \end{cases} \qquad (17)$$

Подставляем соответствующие числа и решаем систему.

Так для обруча получаем:

$$\begin{cases} at=0{,}618 \\ \frac{at^2}{2}=0{,}04 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=0{,}618/t \\ \frac{0{,}618\,t}{2}=0{,}04 \end{cases}$$

$$t=0{,}08/0{,}618\approx 0{,}1294\,c \qquad (18)$$

$$a\approx 0{,}618/0{,}1294\approx 4{,}78\,м/c^2 \qquad (19)$$

Для диска получаем:

$$\begin{cases} at=0{,}622 \\ \frac{at^2}{2}=0{,}04 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=0{,}622/t \\ \frac{0{,}622\,t}{2}=0{,}04 \end{cases}$$

$$t=0{,}08/0{,}622\approx 0{,}1286\,c \qquad (20)$$

$a \approx 0{,}622/0{,}1286 \approx 4{,}84\, м/с^2$ (21)

Для шара получаем:

$$\begin{cases} at = 0{,}623 \\ \dfrac{at^2}{2} = 0{,}04 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0{,}623/t \\ \dfrac{0{,}623\, t}{2} = 0{,}04 \end{cases}$$

$t = 0{,}08/0{,}623 \approx 0{,}1284\, с$ (22)

$a \approx 0{,}623/0{,}1284 \approx 4{,}85\, м/с^2$ (23)

Итак собираем все результаты, получаем следующий ответ.

ОТВЕТ:

обруч:

конечная скорость $v \approx 0{,}618\, м/с$,

ускорение $a \approx 4{,}78\, м/с^2$,

время скатывания $t \approx 0{,}1294\, с$.

диск:

конечная скорость $v \approx 0{,}622\, м/с$,

ускорение $a \approx 4{,}84\, м/с^2$,

время скатывания $t \approx 0{,}1286\, с$.

шар:

конечная скорость $v \approx 0{,}623\, м/с$,

ускорение $a \approx 4{,}85\, м/с^2$,

время скатывания $t \approx 0{,}1284\, с$.