

Задача. При каком наибольшем целом значении параметра a любое x из промежутка $[1; 5]$ удовлетворяет неравенству:

$$3ax + 2\sqrt{3x+1} - 6x + a - 5 < 0.$$

Решение. Сделаем замену $\sqrt{3x+1} = t$, откуда:

$$3x + 1 = t^2$$

$$x = \frac{1}{3}(t^2 - 1)$$

Если x связан условием $1 \leq x \leq 5$, то t связан условием:

$$1 \leq \frac{1}{3}(t^2 - 1) \leq 5$$

$$3 \leq t^2 - 1 \leq 15$$

$$4 \leq t^2 \leq 16$$

$$2 \leq |t| \leq 4$$

$$t \in [-4; -2] \cup [2; 4]$$

Подставим t в исходное неравенство:

$$3x(a-2) + 2\sqrt{3x+1} + a - 5 < 0$$

$$3 \cdot \frac{1}{3}(t^2 - 1)(a-2) + 2t + a - 5 < 0$$

$$(t^2 - 1)(a-2) + 2t + a - 5 < 0$$

$$at^2 - a - 2t^2 + 2 + 2t + a - 5 < 0$$

$$(a-2)t^2 + 2t - 3 < 0$$

Повторим, что нужно сделать: найти такие a , при которых для любых $t \in [-4; -2] \cup [2; 4]$ данное выражение отрицательно.

Для удобства сделаем замену $a - 2 = m$:

$$mt^2 + 2t - 3 < 0$$

Найдём дискриминант трёхчлена:

$$mt^2 + 2t - 3 = 0$$

$$D = 4 + 12m = 4(1 + 3m)$$

Рассмотрим три случая — когда дискриминант отрицателен, равен нулю и положителен.

Небольшое отступление: я сейчас буду действовать довольно топорным методом. Возможно, есть более изящные методы, использующие все свойства квадратного трёхчлена, но я их не помню.

Но сначала исключим **случай 0**, когда $m = 0$ и квадратный трёхчлен превращается в линейную функцию:

$$2t - 3 < 0$$

$$t < 1,5$$

Этот случай не подходит, поскольку не содержит промежуток $t \in [2; 4]$.

Случай 1. Дискриминант отрицателен:

$$4(1 + 3m) < 0$$

$$1 + 3m < 0$$

$$m < -\frac{1}{3}$$

При таких m старший член трёхчлена отрицателен (что логично), то есть ветви параболы направлены вниз, а сам трёхчлен находится ниже оси OX . Это значит, что нам подходит весь промежуток $m < -\frac{1}{3}$.

Случай 2. Дискриминант равен нулю:

$$4(1 + 3m) = 0$$

$$m = -\frac{1}{3}$$

Если дискриминант равен нулю, трёхчлен имеет один корень. Найдём его:

$$-\frac{1}{3}t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$-t^2 + 6t - 9 = 0$$

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$(t - 3)^2 = 0$$

$$t = 3$$

Этот t принадлежит промежутку $t \in [-4; -2] \cup [2; 4]$, но при этом трёхчлен в этой точке равен нулю, а не отрицателен (а у нас строгое неравенство), поэтому нулевой дискриминант не удовлетворяет условию.

Случай 3. Дискриминант положителен:

$$4(1 + 3m) > 0$$

$$m > -\frac{1}{3}$$

Найдём корни трёхчлена:

$$mt^2 + 2t - 3 = 0$$

$$D = 4(1 + 3m)$$

$$t_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{1 + 3m}}{2m} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 3m}}{m}$$

$$t_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 3m}}{m}$$

Неравенство должно выполняться в том числе в крайних точках $t = -4$ и $t = 4$. Доказав, что это невозможно, мы докажем, что дискриминант не может быть положительным.

Первый подслучай. $m > 0$. Тогда ветви параболы направлены вверх, а правым корнем является t_1 . Докажем, что он не может достичь 4 (левый корень тогда автоматически не сможет):

$$t_1 = 4$$

$$\frac{-1 + \sqrt{1 + 3m}}{m} = 4$$

$$-1 + \sqrt{1 + 3m} = 4m$$

$$\sqrt{1 + 3m} = 1 + 4m$$

$$1 + 3m = 1 + 8m + 16m^2$$

$$16m^2 + 5m = 0$$

$$m(16m + 5) = 0$$

$$m = 0; \quad m = -\frac{5}{16}.$$

Но мы предположили, что $m > 0$, а значит, решений нет.

Второй подслучай. $-\frac{1}{3} < m < 0$. Ветви направлены вниз, а t_1 является левым корнем. Докажем, что он не может достигнуть -4 :

$$\begin{aligned} t_1 &= -4 \\ \frac{-1 + \sqrt{1 + 3m}}{m} &= -4 \\ \sqrt{1 + 3m} &= 1 - 4m \\ \begin{cases} 1 + 3m = 1 - 8m + 16m^2 \\ 1 - 4m \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 16m^2 - 11m = 0 \\ m \leq \frac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} m(16m - 11) = 0 \\ m \leq \frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Из уравнения первой системы находится только корень $m = 0$. Но мы предположили, что $m < 0$, а значит, решений нет.

Итак, условию задачи удовлетворяет только $m < -\frac{1}{3}$, то есть, возвращаясь к переменной a :

$$\begin{aligned} a - 2 &< -\frac{1}{3} \\ a &< \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$.