\begin{cases} x'=4x+6y-\sin t\\ y'=3x+y+e^{5t} \end{cases}

**Продифференцируем первое уравнение:**

x''=4x'+6y'-\cos t

**Подставим выражение для y' из второго уравнения:**

x''=4x'+6(3x+y+e^{5t})-\cos t

x''=4x'+18x+6y+6e^{5t}-\cos t

**От получившегося уравнения отнимем первое уравнение системы:**

x''-x'=4x'+18x+6y+6e^{5t}-\cos t-(4x+6y-\sin t)

x''-x'=4x'+18x+6y+6e^{5t}-\cos t-4x-6y+\sin t

x''-5x'-14x=6e^{5t}+\sin t-\cos t

**Решим однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному:**

x''-5x'-14x=0

**Составим характеристическое уравнение:**

\lambda^2-5\lambda-14=0

\lambda_1=7;\ \lambda_2=-2

X=C_1e^{7t}+C_2e^{-2t}

**Предположим, что** C_1 **и** C_2 **не константы, а некоторые функции** C_1=z_1(t) **и** C_2=z_2(t)**.**

**Найдем первую производную:**

X'=C_1'e^{7t}+7C_1e^{7t}+C_2'e^{-2t}-2C_2e^{-2t}

**Пусть** C_1'e^{7t}+C_2'e^{-2t}=0**. Тогда:**

X'=7C_1e^{7t}-2C_2e^{-2t}

**Найдем вторую производную:**

X''=7C_1'e^{7t}+49C_1e^{7t}-2C_2'e^{-2t}+4C_2e^{-2t}

**Подставим значения функции и производных в уравнение относительно х:**

7C_1'e^{7t}+49C_1e^{7t}-2C_2'e^{-2t}+4C_2e^{-2t}-5(7C_1e^{7t}-2C_2e^{-2t})-\\-14(C_1e^{7t}+C_2e^{-2t})=6e^{5t}+\sin t-\cos t

7C_1'e^{7t}+49C_1e^{7t}-2C_2'e^{-2t}+4C_2e^{-2t}-35C_1e^{7t}+10C_2e^{-2t}-\\-14C_1e^{7t}-14C_2e^{-2t}=6e^{5t}+\sin t-\cos t

7C_1'e^{7t}-2C_2'e^{-2t}=6e^{5t}+\sin t-\cos t

**Добавим к полученному уравнению условие, заданное на этапе нахождения первое производной:**

\begin{cases} C_1'e^{7t}+C_2'e^{-2t}=0 \\ 7C_1'e^{7t}-2C_2'e^{-2t}=6e^{5t}+\sin t-\cos t \end{cases}

**Из первого уравнения выразим** C_1'**:**

C_1'=-C_2'e^{-9t}

**Подставим во второе уравнение:**

-7C_2'e^{-9t}e^{7t}-2C_2'e^{-2t}=6e^{5t}+\sin t-\cos t

-9C_2'e^{-2t}=6e^{5t}+\sin t-\cos t

C_2'=-\dfrac{6e^{5t}+\sin t-\cos t}{9e^{-2t}}

C_2'=-\dfrac{1}{9} \left(6e^{7t}+e^{2t}\sin t-e^{2t}\cos t\right)

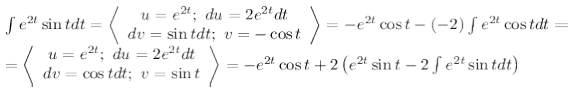
**Найдем** C_1'**:**

C_1'=-C_2'e^{-9t}=\dfrac{1}{9} \left(6e^{-2t}+e^{-7t}\sin t-e^{-7t}\cos t\right)

**Необходимо проинтегрировать выражения для** C_1' **и** C_2'**. Для этого предварительно вычислим следующие циклические интегралы, пользуясь формулой интегрирования по частям:**

\int udv=uv-\int vdu

**1)**



**Пусть** \int e^{2t}\sin tdt=I**. Тогда:**

I=-e^{2t}\cos t+2\left(e^{2t}\sin t-2I\right)

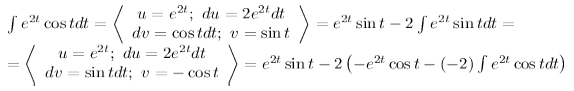
I=-e^{2t}\cos t+2e^{2t}\sin t-4I

5I=e^{2t}(2\sin t-\cos t)

I=\dfrac{1}{5} e^{2t}(2\sin t-\cos t)+C

\int e^{2t}\sin tdt=\dfrac{1}{5}e^{2t} (2\sin t-\cos t)+C

**2)**



**Пусть** \int e^{2t}\cos tdt=I**. Тогда:**

I=e^{2t}\sin t-2\left(-e^{2t}\cos t-(-2)I\right)

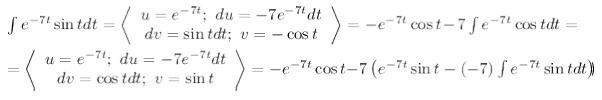
I=e^{2t}\sin t+2e^{2t}\cos t-4I

5I=e^{2t}(\sin t+2\cos t)

I=\dfrac{1}{5}e^{2t} (\sin t+2\cos t)+C

\int e^{2t}\cos tdt=\dfrac{1}{5}e^{2t} (\sin t+2\cos t)+C

**3)**



**Пусть** \int e^{-7t}\sin tdt=I**. Тогда:**

I=-e^{-7t}\cos t-7\left(e^{-7t}\sin t-(-7)I\right)

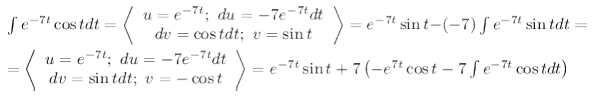
I=-e^{-7t}\cos t-7e^{-7t}\sin t-49I

50I=-e^{-7t}(7\sin t+\cos t)

I=-\dfrac{1}{50} e^{-7t}(7\sin t+\cos t)+C

\int e^{-7t}\sin tdt=-\dfrac{1}{50} e^{-7t}(7\sin t+\cos t)+C

**4)**



**Пусть** \int e^{-7t}\cos tdt=I**. Тогда:**

I=e^{-7t}\sin t+7\left(-e^{7t}\cos t-7I\right)

I=e^{-7t}\sin t-7e^{7t}\cos t-49I

50I=e^{-7t}(\sin t-7\cos t)

I=\dfrac{1}{50} e^{-7t}(\sin t-7\cos t)+C

\int e^{-7t}\cos tdt=\dfrac{1}{50} e^{-7t}(\sin t-7\cos t)+C

**Интегрируем выражение для** C_1'**:**



C_1=\dfrac{1}{9} \left(-3e^{-2t}-\dfrac{1}{50} e^{-7t}(7\sin t+\cos t+\sin t-7\cos t)\right)+D_1

C_1=\dfrac{1}{9} \left(-3e^{-2t}-\dfrac{1}{50} e^{-7t}(8\sin t-6\cos t)\right)+D_1

C_1=-\dfrac{1}{3} e^{-2t}-\dfrac{1}{225} e^{-7t}(4\sin t-3\cos t)+D_1

**Интегрируем выражение для** C_2'**:**

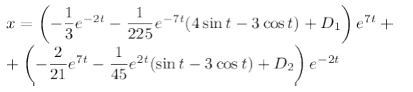
C_2=-\dfrac{1}{9} \left(6\cdot\dfrac{1}{7} e^{7t}+\dfrac{1}{5} e^{2t}(2\sin t-\cos t)-\dfrac{1}{5}e^{2t} (\sin t+2\cos t)\right)+D_2

C_2=-\dfrac{1}{9} \left(\dfrac{6}{7} e^{7t}+\dfrac{1}{5} e^{2t}(2\sin t-\cos t-\sin t-2\cos t)\right)+D_2

C_2=-\dfrac{1}{9} \left(\dfrac{6}{7} e^{7t}+\dfrac{1}{5} e^{2t}(\sin t-3\cos t)\right)+D_2

C_2=-\dfrac{2}{21} e^{7t}-\dfrac{1}{45} e^{2t}(\sin t-3\cos t)+D_2

**Подставляем выражения для** C_1 **и** C_2 **в решение:**



x=-\dfrac{1}{3} e^{5t}-\dfrac{1}{225} (4\sin t-3\cos t)+D_1e^{7t}-\dfrac{2}{21} e^{5t}-\dfrac{1}{45}(\sin t-3\cos t)+D_2e^{-2t}

x=D_1e^{7t}+D_2e^{-2t}-\dfrac{7}{21} e^{5t}-\dfrac{2}{21} e^{5t}-\dfrac{1}{225} (4\sin t-3\cos t)-\dfrac{5}{225}(\sin t-3\cos t)

x=D_1e^{7t}+D_2e^{-2t}-\dfrac{9}{21} e^{5t}-\dfrac{1}{225} (4\sin t-3\cos t)-\dfrac{1}{225}(5\sin t-15\cos t)

x=D_1e^{7t}+D_2e^{-2t}-\dfrac{3}{7} e^{5t}-\dfrac{1}{225} (9\sin t-18\cos t)

x=D_1e^{7t}+D_2e^{-2t}-\dfrac{3}{7} e^{5t}-\dfrac{1}{25} (\sin t-2\cos t)

**Найдем производную:**

x'=7D_1e^{7t}-2D_2e^{-2t}-\dfrac{3}{7}\cdot5e^{5t}-\dfrac{1}{25} (\cos t+2\sin t)

x'=7D_1e^{7t}-2D_2e^{-2t}-\dfrac{15}{7}e^{5t}-\dfrac{1}{25} (\cos t+2\sin t)

**Из первого уравнения исходной системы выразим у:**

y=\dfrac{1}{6} \left(x'-4x+\sin t\right)

**Подставляем выражения для х и х':**

y=\dfrac{1}{6} \left(7D_1e^{7t}-2D_2e^{-2t}-\dfrac{15}{7}e^{5t}-\dfrac{1}{25} (\cos t+2\sin t)-

\left-4\left(D_1e^{7t}+D_2e^{-2t}-\dfrac{3}{7} e^{5t}-\dfrac{1}{25} (\sin t -2\cos t)\right)+\sin t\right)=

=\dfrac{1}{6} \left(7D_1e^{7t}-2D_2e^{-2t}-\dfrac{15}{7}e^{5t}-\dfrac{1}{25} (\cos t+2\sin t)-

\left-4D_1e^{7t}-4D_2e^{-2t}+\dfrac{12}{7} e^{5t}+\dfrac{1}{25} (4\sin t-8\cos t)+\sin t\right)=

=\dfrac{1}{6} \left(3D_1e^{7t}-6D_2e^{-2t}-\dfrac{3}{7}e^{5t}+\dfrac{1}{25} (2\sin t-9\cos t)+\sin t\right)=

=\dfrac{1}{6} \left(3D_1e^{7t}-6D_2e^{-2t}-\dfrac{3}{7}e^{5t}+\dfrac{1}{25} (2\sin t-9\cos t)+\dfrac{1}{25}\cdot25 \sin t\right)=

=\dfrac{1}{6} \left(3D_1e^{7t}-6D_2e^{-2t}-\dfrac{3}{7}e^{5t}+\dfrac{1}{25} (27\sin t-9\cos t)\right)=

=\dfrac{1}{2} D_1e^{7t}-D_2e^{-2t}-\dfrac{1}{14}e^{5t}+\dfrac{1}{50} (9\sin t-3\cos t)

**Ответ:** 