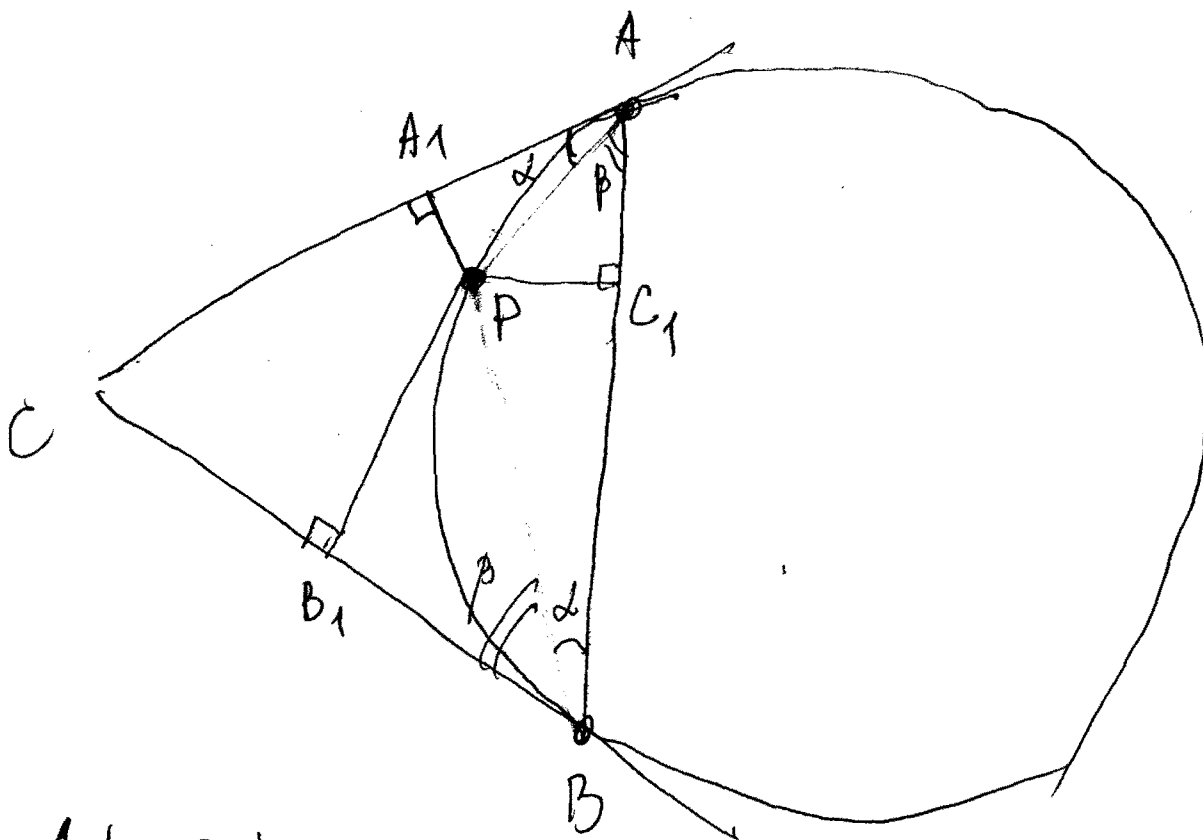




Доказать:

$$PC_1^2 = PA_1 \cdot PB_1$$

Проведем дополнительно PA и PB

Тогда $\angle PBA = \angle PBC_1 = \alpha$ опирается на дугу $\cup AP$ и $= \frac{\cup AP}{2}$

$\Rightarrow \angle A_1AP = \alpha$, так как это угол между хордой

PA и касательной AA $= \frac{\cup PA}{2}$

$\angle PA_1A = \angle PC_1B = 90^\circ$ - по условию задачи.

$$\Rightarrow \triangle PC_1B \sim \triangle PA_1A \Rightarrow \frac{PC_1}{PA_1} = \frac{PB}{PA} \quad (1') \quad (\text{тр-ки подобны по 2-м углам})$$

Аналогично $\angle PAB = \angle PAC_1 = \frac{\cup PB}{2} = \beta$

$\angle B_1BP = \frac{\cup PB}{2} = \beta$ (угол между касательной B₁B

и хордой PB

$\angle PB_1B = \angle PC_1A = 90^\circ$ по условию задачи

$\Rightarrow \triangle PB_1B \sim \triangle PC_1A$ (по 2-м углам) $\Rightarrow$

$$\frac{PC_1}{PB_1} = \frac{PA}{PB} \quad (2') \quad \text{Тогда из (1')} \quad PC_1 = \frac{PB \cdot PA_1}{PA} \quad (1'')$$

$$\text{Тогда из (2')} \quad PC_1 = \frac{PA \cdot PB_1}{PB} \quad (2'')$$

Умножим друг на друга левые и правые
части (1'') и (2'').

$$PC_1 \cdot PC_1 = \frac{PB \cdot PA_1}{PA} \cdot \frac{PA \cdot PB_1}{PB}$$

$$PC_1^2 = PA_1 \cdot PB_1 \quad \text{что и требовалось доказать.}$$

б) Доказать: $PA_1 : PB_1 = PA^2 : PB^2$

Рассмотрим (1') и (2')

$$\frac{PC_1}{PA_1} = \frac{PB}{PA} \quad \text{перемножим как} \quad \frac{PA_1}{PC_1} = \frac{PA}{PB} \quad (1.1.)$$

$$\frac{PC_1}{PB_1} = \frac{PA}{PB} \quad \text{и} \quad \frac{PB_1}{PC_1} = \frac{PB}{PA} \quad (2.1.)$$

$$\text{Выразим из (1.1)} \quad PA_1 = \frac{PA \cdot PC_1}{PB} \quad (1.1.')$$

$$\text{Выразим из (2.1)} \quad PB_1 = \frac{PB \cdot PC_1}{PA} \quad (2.1.')$$

Поремиз левые и правые части (1.1.') и (2.1.')

$$\frac{PA_1}{PB_1} = \frac{PA \cdot PC_1}{PB} : \frac{PB \cdot PC_1}{PA}$$

$$\Rightarrow \frac{PA_1}{PB_1} = \frac{PA \cdot PC_1 \cdot PA}{PB \cdot PB \cdot PC_1} = \frac{PA^2}{PB^2}$$

$$\Rightarrow \frac{PA_1}{PB_1} = \frac{PA^2}{PB^2} \quad \text{что и требовалось доказать.}$$