

$$\begin{cases} 4^x - 12 \cdot 2^x + 32 \geq 0 & (1) \\ \log x(x-2) \log x(x+2) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Определим ОДЗ:

$$\begin{cases} x(x-2) > 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x+2) > 0 & (4) \end{cases}$$

Критические точки неравенства (3): $x_1=0$; $x_2=2$



Решение неравенства (3):

$$x < 0 \text{ или } x > 2$$

Критические точки неравенства (4): $x_1=-2$; $x_2=0$



Решение неравенства (4):

$$x < -2 \text{ или } x > 0$$

Совокупным решением будет ОДЗ: $x < -2$ или $x > 2$

Решим неравенство (1): $(2^x)^2 - 12 \cdot 2^x + 32 \geq 0$

Определим критические точки: $2^{x_1}=8$ $2^{x_2}=4$;

$$2^{x_1}=2^3; \quad 2^{x_2}=2^2; \quad x_1=3; \quad x_2=2$$



Решение неравенства (1):

$$x \leq 2 \text{ или } x \geq 3$$

Неравенство (2) справедливо, когда сомножители имеют разные знаки, т.е.

$$\begin{cases} \log x(x-2) \geq 0 \\ \log x(x+2) \leq 0 \end{cases} \quad (5) \text{ или } \begin{cases} \log x(x-2) \leq 0 \\ \log x(x+2) \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Решим систему неравенств (5):

$$\begin{cases} x(x-2) \geq 1 \\ x(x+2) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 \geq 0 & (6) \\ x^2 + 2x - 1 \leq 0 & (7) \end{cases}$$

Критические точки неравенства (6):

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x_1 = 1 - \sqrt{2} \quad x_2 = 1 + \sqrt{2}$$



Решение неравенства (6):

$$x \leq 1 - \sqrt{2} \text{ или } x \geq 1 + \sqrt{2}$$

Критические точки неравенства (7):

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$x_1 = -1 - \sqrt{2} \quad x_2 = -1 + \sqrt{2}$$



Решение неравенства (7)

$$-1 - \sqrt{2} \leq x \leq -1 + \sqrt{2}$$

Совместным решением системы (5) будет

$$-1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 - \sqrt{2}$$

Система (6) имеет такие же критические точки, что и система (5), т.е.

$$\{ [x - (-1 - \sqrt{2})][x - (-1 + \sqrt{2})] \leq 0 \quad (8)$$

$$[x - (-1 - \sqrt{2})][x - (-1 + \sqrt{2})] \geq 0 \quad (9)$$

Решение неравенства (8)

$$-1 - \sqrt{2} \leq x \leq -1 + \sqrt{2}$$

Решение неравенства (9)

$$x \leq -1 - \sqrt{2} \text{ или } x \geq -1 + \sqrt{2}$$

Совместным решением системы (6) будет

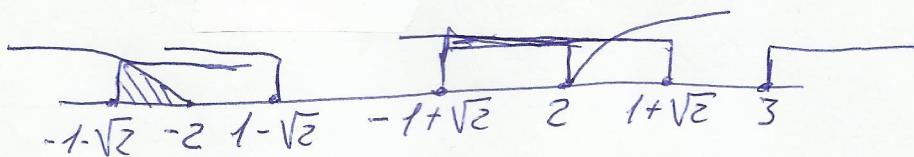
$$-1 + \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$$

Итак, имеем следующие значения x :

$$x \leq -2 \text{ или } x \geq 3$$

$$x \leq -2 \text{ или } x \geq 2$$

$$-1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 - \sqrt{2} \text{ или } -1 + \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$$



Совокупным решением системы (4) будет

$$-1 - \sqrt{2} \leq x \leq -2$$