Задача. Найти первообразную

$$f(x) = \sqrt{10x - x^2}$$

Решение. Выделим под корнем полный квадрат:

$$\sqrt{10x - x^2} = \sqrt{-25 + 10x - x^2 + 25} = \sqrt{-(x^2 - 10x + 25) + 25} =$$

$$= \sqrt{5^2 - (x-5)^2}$$

Найдём неопределённый интеграл:

$$\int \sqrt{5^2 - (x-5)^2}\, dx$$

Сделаем замену:

$$x - 5 = 5\sin t$$

Тогда:

$$dx = 5\cos t\, dt$$

$$x = 5\sin t + 5$$

$$t = \arcsin\frac{x-5}{5}$$

$$\sin t = \frac{x-5}{5}$$

$$\int \sqrt{5^2 - (x-5)^2}\, dx = \int \sqrt{5^2 - (5\sin t)^2} \cdot 5\cos t\, dt =$$

$$= 5\int \sqrt{5^2 - 5^2 \cdot \sin^2 t} \cdot \cos t\, dt = 5\int \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t}\, \cos t\, dt =$$

$$= 25\int \cos t \cdot \cos t\, dt = 25\int \cos^2 t\, dt$$

Применим формулу понижения степени:

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

$$25\int \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = \frac{25}{2}\int (1 + \cos 2t)\, dt$$

Подведём под знак дифференциала:

$$d(2t) = 2dt; \qquad dt = \frac{1}{2}d(2t)$$

$$\frac{25}{2}\int (1 + \cos 2t) \cdot \frac{1}{2}d(2t) = \frac{25}{4}\int (1 + \cos 2t)\, d(2t) =$$

$$= \frac{25}{4}(2t + \sin 2t) + C = \frac{25}{4}(2t + 2\sin t \cos t) + C = \frac{25}{2}(t + \sin t \cos t) + C =$$

$$= \frac{25}{2}t + \frac{25}{2}\sin t\sqrt{1 - \sin^2 t} + C =$$

$$= \frac{25}{2}\arcsin\frac{x-5}{5} + \frac{25}{2}\cdot\frac{x-5}{5}\cdot\sqrt{1 - \left(\frac{x-5}{5}\right)^2} + C =$$

$$= \frac{25}{2}\arcsin\frac{x-5}{5} + \frac{5(x-5)}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{x-5}{5}\right)^2} + C$$

Возможно, ответ можно ещё немного «причесать» — оставляю это за тобой ;)

На скриншоте приведена проверка на компьютере путём дифференцирования полученного выражения.

genius20 для https://znanija.com/task/49792458