

$$a) x^2 dx - y^2 dy = 0$$

Ну это с разделяющимися переменными.

$$y^2 dy = x^2 dx$$

$$\int y^2 dy = \int x^2 dx + C$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C$$

$$y^3 = x^3 + 3C$$

3C все равно константа

$$y^3 = x^3 + \tilde{C}$$

$$y = \sqrt[3]{x^3 + \tilde{C}}$$

$$б) x^2 y' = y' - 2xy \quad (\text{при } x=2; y=1)$$

Сначала ищем общее решение.

$$x^2 y' = y' - 2xy$$

$$(x^2 - 1)y' + 2xy = 0$$

Ну это 1-го порядка, линейное, с переменными коэффициентами, однородное (по совместительству тоже с разделяющимися переменными). Значит можно так.

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$\frac{dy}{y} = -\int \frac{2x dx}{x^2 - 1} + \ln C$$

$$\ln y = -\int \frac{2x dx}{x^2 - 1} + \ln C \quad [**]$$

Интеграл в правой части [**] можно осилить заменой переменной.

$$\int \frac{2x dx}{x^2 - 1} = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 - 1 \\ du = 2x dx \end{array} \right\} = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(x^2 - 1) \quad (*)$$

Подставляем результат интегрирования (*) в [**].

$$\ln y = -\ln(x^2 - 1) + \ln C$$

Потенцируем.

$$y = \exp(-\ln(x^2 - 1) + \ln C)$$

$$y = C e^{-\ln(x^2 - 1)} = C (x^2 - 1)^{-1}$$

$$y = \frac{C}{x^2 - 1} \quad (***)$$

Общее решение найдено. Теперь ищем частное, удовлетворяющее начальному условию. Подставляем значения x и y в (***) и находим значение константы C .

$$1 = \frac{C}{2^2 - 1} = \frac{C}{3}$$

$$C = 3$$

Значит нужное нам частное решение:

$$y(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$$