$\left(x^2+2x\right)^2-2(x+1)^2=1$

$\left(x^2+2x\right)^2-2(x+1)^2-1=0$

$\left(x^2+2x\right)^2-2\left(x^2+2x+1\right)-1=0$

замена переменных.

Пусть $t=x^2+2x$

В результате .

$t^2-2(t+1)-1=0$

$t^2-(2t+2)-1=0$

$t^2-2t-2-1=0$

$t^2-2t-3=0$

Находим дискриминант.

$$D=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot1(-3)=16$$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$t_1=\frac{2-4}{2\cdot1}=-1$;$t_2=\frac{2+4}{2\cdot1}=3$

В этом случае

$x^2+2x=-1$

$x^2+2x=3$

Решаем каждое уравнение

1)

$x^2+2x=-1$

$x^2+2x+1=0$

Находим дискриминант.

$$D=b^2-4ac=2^2-4\cdot1\cdot1=0$$

Дискриминант равен нулю, значит уравнение имеет один корень.

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\cdot 1}=-1$$

2)

$$x^2+2x=3$$

$$x^2+2x-3=0$$

Находим дискриминант.

$$D=b^2-4ac=2^2-4\cdot 1(-3)=16$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$x_1=\frac{-2-4}{2\cdot 1}=-3$;$x_2=\frac{-2+4}{2\cdot 1}=1$

ответ: $x=-3;x=-1;x=1$.