

Решить систему

$$\begin{cases} x^4 + y^4 - x^2 - y^2 = 12 \\ 2x^2 - xy + 2y^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^4 + y^4) - (x^2 + y^2) - 12 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 - xy - 8 = 0 \end{cases}$$

ну как всегда заменим переменные: $a = x + y$; $b = xy$

преобразуем уравнение

$$(x^4 + y^4) - (x^2 + y^2) - 12 = 0$$

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2 - ((x + y)^2 - 2xy) - 12 = 0$$

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2) - 2(xy)^2 - ((x + y)^2 - 2xy) - 12 = 0$$

$$((x + y)^2 - 2xy)((x + y)^2 - 2xy) - 2(xy)^2 - ((x + y)^2 - 2xy) - 12 = 0$$

$$(x + y)^4 - 2xy(x + y)^2 - 2xy(x + y)^2 + 4(xy)^2 - 2(xy)^2 - (x + y)^2 + 2xy - 12 = 0$$

фух... блин... преобразовал :)

подставим переменные

$$a^4 - 4ba^2 + 2b^2 - a^2 + 2b - 12 = 0$$

преобразуем следующее уравнение

$$2x^2 - xy + 2y^2 = 8$$

$$2x^2 + 2y^2 - xy - 8 = 0$$

$$2((x + y)^2 - 2xy) - xy - 8 = 0$$

$$2(x + y)^2 - 5xy - 8 = 0$$

подставим переменные

$$2a^2 - 5b - 8 = 0$$

запишем систему

$$\begin{cases} a^4 - 4ba^2 + 2b^2 - a^2 + 2b - 12 = 0 \\ 2a^2 - 5b - 8 = 0 \end{cases}$$

заменяем ещё одну переменную: $c = a^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} c=a^2 \\ c^2 - 4bc + 2b^2 - c + 2b - 12 = 0 \\ 2c - 5b - 8 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c=a^2 \\ \left(\frac{5b+8}{2} \right)^2 - 4b \frac{5b+8}{2} + 2b^2 - \frac{5b+8}{2} + 2b - 12 = 0 \\ c = \frac{5b+8}{2} \end{array} \right.$$

теперь решаем это страшное вспомогательное уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{5b+8}{2} \right)^2 - 4b \frac{5b+8}{2} + 2b^2 - \frac{5b+8}{2} + 2b - 12 &= 0 \\ \frac{25b^2 + 80b + 64}{4} - 10b^2 - 16b + 2b^2 - \frac{5b+8}{2} + 2b - 12 &= 0 \\ \frac{25b^2 + 80b + 64 - 2(5b+8)}{4} - 8b^2 - 14b - 12 &= 0 \\ \frac{25b^2 + 70b + 48 - 4(8b^2 + 14b + 12)}{4} &= 0 \\ \frac{25b^2 + 70b + 48 - 32b^2 - 56b - 48}{4} &= 0 \\ \frac{-7b^2 + 14b}{4} &= 0 \end{aligned}$$

дробь обращается в ноль, если числитель равен нулю

$$7b^2 - 14b = 0$$

$$7(b^2 - 2b) = 0$$

$$b^2 - 2b = 0$$

$$b(b - 2) = 0$$

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c=a^2 \\ c=\frac{5b+8}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c=a^2 \\ \left[\begin{array}{l} b=0 \\ c=4 \\ b=2 \\ c=9 \end{array} \right] \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ a=\pm 2 \\ b=2 \\ a=\pm 3 \end{array} \right]$$

Случай 1

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y=2 \\ xy=0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=2-y \\ y(2-y)=0 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ x=2 \\ y=2 \\ x=0 \end{array} \right]$$

Случай 2

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y=-2 \\ xy=0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-2-y \\ y(-2-y)=0 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ x=-2 \\ y=-2 \\ x=0 \end{array} \right]$$

Случай 3

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y=3 \\ xy=2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=3-y \\ y(3-y)-2=0 \end{array} \right.$$

решаем вспомогательное уравнение

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

$$y_1 = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$y_2 = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} y=2 \\ x=3-2 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} y=1 \\ x=3-1 \end{array} \right. \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} y=2 \\ x=1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} y=1 \\ x=2 \end{array} \right. \end{array} \right]$$

Случай 4

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y=-3 \\ xy=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-3-y \\ y(-3-y)-2=0 \end{array} \right\}$$

решаем вспомогательное уравнение

$$y^2 + 3y + 2 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

$$y_1 = \frac{-3+1}{2} = -1$$

$$y_2 = \frac{-3-1}{2} = -2$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} y=-1 \\ x=-3-(-1) \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} y=-2 \\ x=-3-(-2) \end{array} \right\} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} y=-1 \\ x=-2 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} y=-2 \\ x=-1 \end{array} \right\} \end{array} \right]$$

УРА!!! УРА!!! УРА!!! Ну вот как то вот так...

Ответ:

$$(x=-2, y=-1); (x=-1, y=-2); (x=2, y=1); (x=1, y=2); (x=0, y=-2); (x=-2, y=0)$$