Доказать: $\dfrac{a+b}{a^2+b^2}+\dfrac{b+c}{b^2+c^2}+\dfrac{c+a}{c^2+a^2}\leqslant\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$, если $a,b,c>0$.

При доказательстве будем использовать два утверждения.

Неравенство о средних. При любых $x,y>0$ верно:

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}\geqslant\frac{2xy}{x+y}$$

Доказательство есть в любом школьном учебнике за 9 класс, например в Мерзляке.

Лемма 1. При любых $x,y>0$ верно, что если $x\geqslant y$, то $\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{1}{y}$.

Доказательство. Разделим обе части первого неравенства на xy (мы можем это сделать, поскольку $xy>0$):

$$\frac{x}{xy}\geqslant\frac{y}{xy}$$

$$\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{y}.$$

Доказательство неравенства. По неравенству о средних:

$$\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{2ab}{a+b}$$

$$a+b\leqslant\frac{4ab}{a+b} \tag{1}$$

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\sqrt{a^2b^2}=ab$$

$$a^2+b^2\geqslant 2ab$$

По лемме 1:

$$\frac{1}{a^2+b^2}\leqslant\frac{1}{2ab} \tag{2}$$

Почленно умножим неравенства (1) и (2) (мы можем это сделать, поскольку все члены строго положительны):

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}\leqslant\frac{4ab}{2ab(a+b)}$$

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}\leqslant\frac{2}{a+b} \tag{3}$$

Аналогично:

$$\frac{b+c}{b^2+c^2}\leqslant\frac{2}{b+c} \tag{4}$$

$$\frac{c+a}{c^2+a^2} \leqslant \frac{2}{c+a} \tag{5}$$

Почленно сложим неравенства (3), (4) и (5):

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leqslant \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \tag{6}$$

Далее перепишем неравенство о средних в таком виде:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

По лемме 1 получим:

$$\frac{2}{a+b} \leqslant \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$$

$$\frac{2}{a+b} \leqslant \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} \tag{7}$$

Аналогично:

$$\frac{2}{b+c} \leqslant \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} \tag{8}$$

$$\frac{2}{c+a} \leqslant \frac{1}{2c} + \frac{1}{2a} \tag{9}$$

Почленно сложим неравенства (7), (8) и (9):

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{a+c} + \frac{2}{c+a} \leqslant \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \tag{10}$$

Из неравенств (6) и (10) получаем цепочку:

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leqslant \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

откуда сразу следует:

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

что и требовалось доказать.

Если что-нибудь непонятно — спрашивай.

genius20 для https://znanija.com/task/49786978