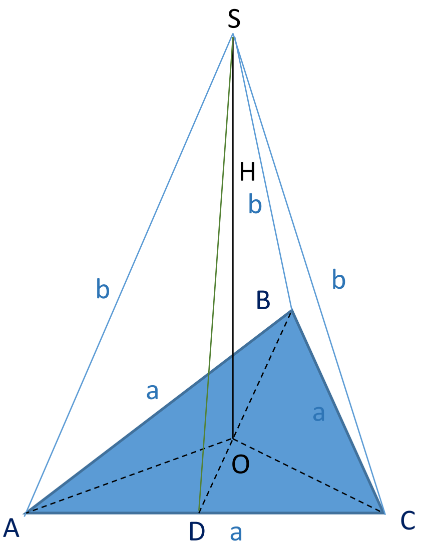
В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, высота равна H. Найдите: а) боковое ребро пирамиды; б) плоский угол при вершине пирамиды; в) угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды; г) угол между боковой гранью и основанием пирамиды; д) двугранный угол при боковом ребре пирамиды.



Дано:

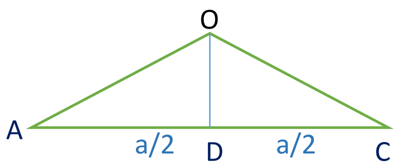
Правильная пирамида

a

H

а) Найти: b

Пирамида называется правильной, если её основанием является правильный многоугольник, при этом вершина такой пирамиды проецируется в центр ее основания. В правильном треугольнике центр треугольника является точкой пересечения биссектрис, высот и медиан. Центр треугольника является также центром описанной окружности. Следовательно ΔAOC равнобедренный. OC является биссектрисой угла ACB. Все углы правильного треугольника равны 60^0. Значит



$\angle ACO = 60^0 : 2 = 30^0$

Треугольник ODC прямоугольный. По определению косинуса

$$\cos \angle DCO = \frac{DC}{OC}$$

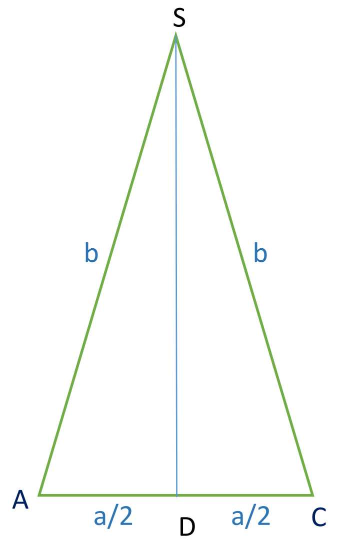
$$OC = \frac{DC}{\cos \angle DCO} = \frac{\frac{a}{2}}{\cos 30^0} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Треугольник SOC прямоугольный. По теореме Пифагора

$$b = \sqrt{OC^2 + H^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + H^2}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{a^2}{3} + H^2}$

б) Найти: ∠ASC



Треугольник ASC равнобедренный. Треугольник DSC прямоугольный. По определению синуса

$$\sin\angle \mathrm{DSC} = \frac{DC}{SC} = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{3} + H^2}} = \frac{a}{2\cdot\sqrt{\frac{a^2}{3} + H^2}}$$

$$\angle \mathrm{DSC} = \arcsin\left(\frac{a}{2\cdot\sqrt{\frac{a^2}{3} + H^2}}\right)$$

$$\angle \mathrm{ASC} = 2\angle \mathrm{DSC} = \arcsin\left(\frac{a}{\sqrt{\frac{a^2}{3} + H^2}}\right)$$

Ответ: $\arcsin\left(\frac{a}{\sqrt{\frac{a^2}{3}+H^2}}\right)$

в) Найти: ∠SCO

Треугольник SCO прямоугольный. По определению тангенса

$$\mathrm{tg}\,\angle \mathrm{SCO} = \frac{SO}{OC} = \frac{H}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = \frac{H\sqrt{3}}{a}$$

$$\angle \mathrm{SCO} = \mathrm{arctg}\left(\frac{H\sqrt{3}}{a}\right)$$

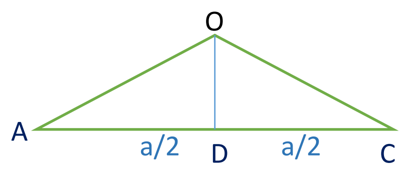
Ответ: $\mathrm{arctg}\left(\frac{H\sqrt{3}}{a}\right)$

г) Найти: ∠SDO

Треугольник ODC прямоугольный. По определению тангенса

$$\mathrm{tg}\,\angle \mathrm{DCO} = \frac{OD}{DC}$$

$$OD = DC\,\mathrm{tg}\,\angle \mathrm{DCO} = \frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$



Треугольник SDO прямоугольный. . По определению тангенса

$$\mathrm{tg}\,\angle \mathrm{SDO} = \frac{SO}{OD} = \frac{H}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{6H}{a\sqrt{3}}$$

$$\angle \mathrm{SDO} = \mathrm{arctg}\left(\frac{6H}{a\sqrt{3}}\right)$$

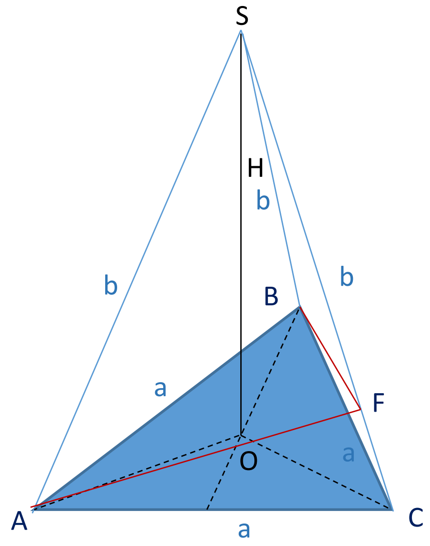
Ответ: $\mathrm{arctg}\left(\frac{6H}{a\sqrt{3}}\right)$

д)

AF⊥SC

BF⊥SC

Найти: ∠AFB



∠FAC=∠CSD как углы со взаимоперпендикулярными сторонами. Треугольники FAC и CSD перпендикулярные. Следовательно, они подобные. Тогда

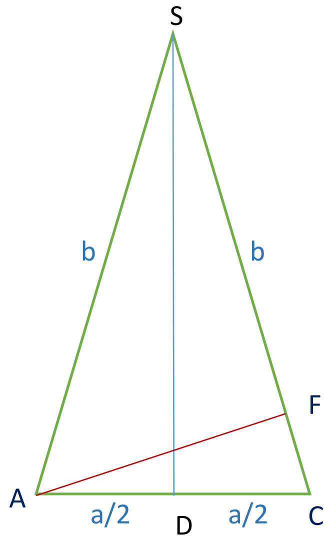
$$\frac{AF}{AC} = \frac{SD}{AS}$$

$$\frac{AF}{a} = \frac{SD}{b}$$

$$\frac{AF}{a} = \frac{SD}{\sqrt{\frac{a^2}{3} + H^2}}$$

По теореме Пифагора находим катет SD треугольника ASD

$$\mathrm{SD} = \sqrt{AS^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + H^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{12} + H^2}$$



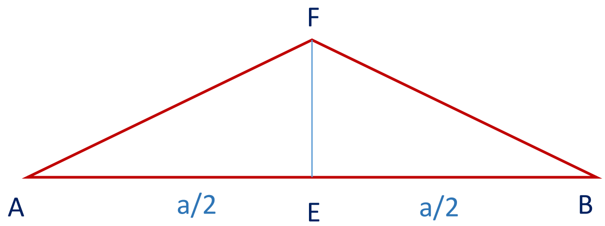
Тогда

$$\frac{AF}{a} = \frac{\sqrt{\frac{a^2}{12} + H^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{3} + H^2}}$$

$$\frac{AF}{a} = \sqrt{\frac{\frac{a^2}{12} + H^2}{\frac{a^2}{3} + H^2}} = \sqrt{\frac{\frac{a^2 + 12H^2}{12}}{\frac{a^2 + 3H^2}{3}}} = \sqrt{\frac{a^2 + 12H^2}{4(a^2 + 3H^2)}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2 + 12H^2}{a^2 + 3H^2}}$$

$$AF = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2 + 12H^2}{a^2 + 3H^2}}$$



Т.к. все боковые грани являются равными треугольниками, то AF=FB. Проведем FE⊥AB. Треугольник EFA прямоугольный. Тогда

$$\sin\angle\mathrm{AFE} = \frac{AE}{AF} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2 + 12H^2}{a^2 + 3H^2}}} = \sqrt{\frac{a^2 + 3H^2}{a^2 + 12H^2}}$$

$$\angle\mathrm{AFE} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{a^2 + 3H^2}{a^2 + 12H^2}}\right)$$

$$\angle \mathrm{AFB} = 2\angle \mathrm{AFE} = 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{a^2 + 3H^2}{a^2 + 12H^2}}\right)$$

Ответ: $2\arcsin\left(\sqrt{\frac{a^2+3H^2}{a^2+12H^2}}\right)$