20. $a>0$ $b>0$ $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{1}{a}\right)(4+b)\geq 16$ - доказать!

Раскроем скобки слева: $4+b+\frac{4a}{b}+a+\frac{4}{a}+\frac{b}{a}+\frac{4}{b}+1\geq 16$

Воспользуемся неравенством Коши (AM-GM inequality)

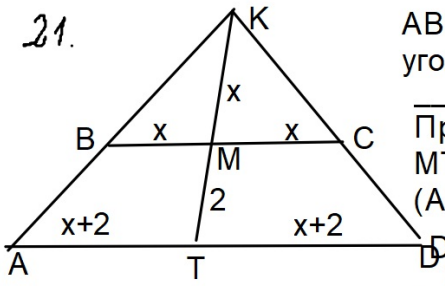
если a1,a2,a3...an>0, то $(a_1+a_2+a_3+...+a_n)/n \geq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n}$

В нашем случае a1=4 , a2=b , a3= 4a/b... a8=1 n=8

$$\Rightarrow 4+b+\frac{4a}{b}+a+\frac{4}{a}+\frac{b}{a}+\frac{4}{b}+1\geq 8\sqrt[8]{\frac{4\cdot b\cdot 4a\cdot a\cdot 4\cdot b\cdot 4\cdot 1}{a\cdot b\cdot a\cdot b}}=8\sqrt[8]{4^4}$$

$$\Rightarrow 4+b+\frac{4a}{b}+a+\frac{4}{a}+\frac{b}{a}+\frac{4}{b}+1\geq 8\cdot 2=16$$ что и требовалось доказать

21.



ABCD -трапеция, Ср линия=9 . BM=MC, AT=TD , MT=2
угол A=35º, D=55º. Найти AD и BC.

Продлим AB и DC до пересечения в K. Через K будет проходить MT (так как KT- медиана в треугольниках BKC и AKD).
(AD+BC)/2=9 (свойство ср линии) => AD+BC=18
Угол K=180°-A-D=90° => KT-медиана прямоугольных треугольников и KT=AT=TD ; KM=BM=MC
ΔAKD~ ΔBKC (по 2-м углам). =>AD/BC=KT/KM
Пусть KM=BM=MC=x => (18-BC)/BC = (2+x)/x => (18-2x)/2x=(2+x)/x =>18-2x=4+2x => x=3.5
=>BC=3.5*2=7cm AC=18-7=11cm