При каком а уравнение имеет только 3 корня на промежутке (-1;1]?
4a^2*x^4 + (2a-8)x^2 + a + |a| = 0.

$4a^2x^4 + (2a-8)x^2 + a + |a| = 0$.

1. Ясно, что $a \neq 0$, т.к. при $a = 0$ получается уравнение $-8x^2 = 0$, у которого только 2 корня $x_1 = x_2 = 0$, а по условию корней должно быть 3.

2. При $a < 0$ имеем $4a^2x^4 + (2a-8)x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(2a^2x^2 + a - 4) = 0$.

Отсюда $x_1 = x_2 = 0$ и $x^2 = \frac{4-a}{2a^2}$. Т.к. $-1 < x \le 1$, то $x^2 \le 1 \Rightarrow \frac{4-a}{2a^2} \le 1$. Т.к. $a^2 > 0$, то $4 - a \le 2a^2 \Leftrightarrow 2a^2 + a - 4 \ge 0$; $D = 1^2 + 4 \cdot 2 \cdot 4 = 33$.

Отсюда $a \le -\frac{1+\sqrt{33}}{4} \cup a \ge \frac{\sqrt{33}-1}{4}$. Т.к. $a < 0$, то $a \le -\frac{1+\sqrt{33}}{4}$. Если $a < -\frac{1+\sqrt{33}}{4}$, то $x^2 = \frac{4-a}{2a^2} < 1$ и оба корня $x_3 = -\sqrt{\frac{4-a}{2a^2}}$ и $x_4 = \sqrt{\frac{4-a}{2a^2}}$ принадлежат промежутку $(-1;1]$ и уравнение $4a^2x^4 + (2a-8)x^2 = 0$ имеет 4 корня на промежутке $(-1;1]$. Поэтому $a = -\frac{1+\sqrt{33}}{4}$. В этом случае $x_3 = -\sqrt{\frac{4-a}{2a^2}} = -1$ не принадлежит промежутку $(-1;1]$, а $x_4 = \sqrt{\frac{4-a}{2a^2}} = 1$ принадлежит, и уравнение имеет только 3 корня: $x_1 = x_2 = 0$ и $x_4 = 1$ на заданном промежутке.

3. $a > 0$.

$4a^2x^4 + (2a-8)x^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow 2a^2x^4 + (a-4)x^2 + a = 0 \Leftrightarrow 2a^2x^4 = (4-a)x^2 - a$.

И здесь мне больше, чем на 2 дня «заклинило» мозги. Поэтому, скорее всего, с ответом я безнадёжно опоздал, но всё же… Отметим, что $x = 0$ не является корнем уравнения $2a^2x^4 + (a-4)x^2 + a = 0$ (1), т.к. $x = 0 \Rightarrow a = 0$, а мы рассматриваем случай $a > 0$. Пусть $0 < x_1 < x_2$, где x_1 и x_2 – корни уравнения (1). Тогда $-x_2$ и $-x_1$ – тоже корни уравнения (1). Если $x_2 < 1$, то все 4 корня $-x_2$, $-x_1$, x_1 и x_2 попадают в промежуток $(-1;1]$, если же $x_1 < 1$, а $x_2 > 1$, то в промежуток $(-1;1]$ попадают только 2 корня $-x_1$ и x_1, наконец, если $x_1 > 1$ и $x_2 > 1$, то в промежуток $(-1;1]$ не попадает ни одного корня. Поэтому необходимо $x_2 = 1$. Подставляя этот корень в уравнение (1), получим: $2a^2 + 2a - 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 + a - 2 = 0$; $D = 1 + 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9$; $a_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$, $a_2 = 1$.

Т.к. $a > 0$, то $a = a_2 = 1$. Чтобы убедиться, что при $a = 1$ ровно 3 корня попадают в промежуток $(-1;1]$, найдём эти корни: $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$; $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$;

$x_1^2 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$, $x_{11} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2^2 = \frac{3+1}{4} = 1$, $x_{21} = -1$, $x_{22} = 1$. Ровно 3 корня x_{11}, x_{12} и x_{22} попадают в промежуток $(-1;1]$.

Ответ: $a = -\frac{1+\sqrt{33}}{4} \cup a = 1$.