

Дано:

$$AB = a$$

$$\angle ABC = \varphi = 60^\circ$$

Найти: S

Решение.

Формула площади круга

$$S = \pi R^2$$

Формула радиуса вписанной окружности

$$R = \sqrt{AB \cdot DC} = \sqrt{ac}$$

Известно, что если в трапецию можно вписать окружность, то должно выполняться соотношение

$$AB + DC = AD + CB$$

$$a + c = 2b$$

Из прямоугольного треугольника FBC имеем

$$\cos \varphi = \frac{FB}{CB} = \frac{(AB - DC)/2}{CB} = \frac{a - c}{2b}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{a - c}{2b}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a - c}{2b}$$

$$b = a - c$$

Тогда

$$a + c = 2(a - c)$$

$$a + c = 2a - 2c$$

$$3c = a$$

$$c = \frac{a}{3}$$

Окончательно получаем

$$S = \pi R^2 = \pi ac = \pi a \frac{a}{3} = \frac{\pi a^2}{3}$$

Ответ: $\frac{\pi a^2}{3}$

