

3) На длинной полоске бумаги выписаны натуральные числа 1, 2, 3, ..., N. Полоску разрезали на пять частей и нашли среднее арифметическое чисел на каждой части. Получились числа 5,5; 18; 38; 75,5 и 175,5 в некотором порядке. Найдите N.

Не помню, как решал товарищ до это, ну из спортивного интереса попробуем решить самостоятельно.

Значит так. Пусть полученные кусочки заканчиваются числами:

m_1, m_2, m_3, m_4, N

Начинаюся

1, $m_1+1, m_2+1, m_3+1, m_4+1$.

При этом:

$$1 < m_1 < m_2 < m_3 < m_4 < N$$

«Кусочки» полоски выглядят примерно так:

$$\begin{aligned} [1, 2, \dots, m_1] & 1-\text{й} \\ [m_1+1, m_1+2, \dots, m_2] & 2-\text{й} \\ [m_2+1, m_2+2, \dots, m_3] & 3-\text{й} \\ [m_3+1, m_3+2, \dots, m_4] & 4-\text{й} \\ [m_4+1, m_4+2, \dots, N] & 5-\text{й} \end{aligned} \quad (1)$$

Соответственно средние арифметические чисел на кусочках.

$$s_1 = \frac{\sum_{j=1}^{m_1} j}{m_1}$$

$$s_2 = \frac{\sum_{j=m_1+1}^{m_2} j}{m_2 - m_1} \quad (2)$$

$$s_3 = \frac{\sum_{j=m_2+1}^{m_3} j}{m_3 - m_2}$$

$$s_4 = \frac{\sum_{j=m_3+1}^{m_4} j}{m_4 - m_3} \quad (2)$$

$$s_5 = \frac{\sum_{j=m_4+1}^N j}{N - m_4}$$

Ну начнем по порядку.

$$s_1 = \frac{\sum_{j=1}^{m_1} j}{m_1} = 5,5 \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{m_1} j = 5,5 m_1 \quad (4)$$

Сумма слева в (4) есть сумма m_1 членов арифметической прогрессии (1й член которой равен 1, а «последний» m_1). Тогда (4) можно переписать в виде:

$$(m_1 + 1) \frac{m_1}{2} = 5,5 m_1 \quad (5)$$

А отсюда уже можно найти m_1 .

$$(m_1 + 1) \frac{1}{2} = 5,5$$

$$m_1 + 1 = 11$$

$$m_1 = 10 \quad (6)$$

«Боремся» далее

$$s_2 = \frac{\sum_{j=m_1+1}^{m_2} j}{m_2 - m_1} = 18 \quad (7)$$

$$\sum_{j=m_1+1}^{m_2} j = 18(m_2 - m_1) \quad (8)$$

Сумма слева в (8) есть сумма $m_2 - m_1$ членов арифметической прогрессии (1й член которой равен $m_1 + 1$, а «последний» m_2). Тогда (8) можно переписать в виде:

$$(m_1+1+m_2)\frac{m_2-m_1}{2}=18(m_2-m_1) \quad (9)$$

А отсюда уже можно найти m_2 .

$$\frac{(m_1+1+m_2)}{2}=18$$

$$m_2=36-1-m_1$$

$$m_2=36-1-10=25 \quad (10)$$

Разбираем следующий кусок

$$s_3 = \frac{\sum_{j=m_2+1}^{m_3} j}{m_3 - m_2} = 38 \quad (11)$$

$$\sum_{j=m_2+1}^{m_3} j = 38(m_3 - m_2) \quad (12)$$

Сумма слева в (12) есть сумма $m_3 - m_2$ членов арифметической прогрессии (1й член которой равен m_2+1 , а «последний» m_3). Тогда (12) можно переписать в виде:

$$(m_2+1+m_3)\frac{m_3-m_2}{2}=38(m_3-m_2)$$

$$\frac{m_2+1+m_3}{2}=38 \quad (13)$$

А отсюда уже можно найти m_3 .

$$m_2+1+m_3=76$$

$$m_3=76-1-m_2=76-1-25=50$$

$$m_3=50 \quad (14)$$

Далее.

$$s_4 = \frac{\sum_{j=m_3+1}^{m_4} j}{m_4 - m_3} = 75,5 \quad (15)$$

$$\sum_{j=m_3+1}^{m_4} j = 75,5(m_4 - m_3) \quad (16)$$

Сумма слева в (16) есть сумма $m_4 - m_3$ членов арифметической прогрессии (1й член которой равен $m_3 + 1$, а «последний» m_4). Тогда (16) можно переписать в виде:

$$(m_3 + 1 + m_4) \frac{m_4 - m_3}{2} = 75,5(m_4 - m_3)$$

$$m_3 + 1 + m_4 = 151 \quad (17)$$

А отсюда уже можно найти m_4 .

$$m_4 = 151 - 1 - m_3 = 151 - 1 - 50 = 100$$

$$m_4 = 100 \quad (18)$$

Наконец находим N

$$s_5 = \frac{\sum_{j=m_4+1}^N j}{N - m_4} = 175,5 \quad (19)$$

$$\sum_{j=m_4+1}^N j = 175,5(N - m_4) \quad (20)$$

Сумма слева в (20) есть сумма $N - m_4$ членов арифметической прогрессии (1й член которой равен $m_4 + 1$, а «последний» N). Тогда (20) можно переписать в виде:

$$(m_4 + 1 + N) \frac{N - m_4}{2} = 175,5(N - m_4)$$

$$m_4 + 1 + N = 351 \quad (21)$$

А отсюда уже можно найти N .

$$N = 351 - 1 - m_4 = 351 - 1 - 100 = 250$$

$$N = 250 \quad (22)$$

Теперь собирая (6), (10), (14), (18), (22), можно сказать, что кусочки ленты будут выглядеть примерно так:

$[1, 2, \dots, 10] \quad 1-\text{й}$
 $[11, 12, \dots, 25] \quad 2-\text{й}$
 $[26, 27, \dots, 50] \quad 3-\text{й}$
 $[51, 52, \dots, 100] \quad 4-\text{й}$
 $[101, 102, \dots, 250] \quad 5-\text{й}$

Искомое $N=250$