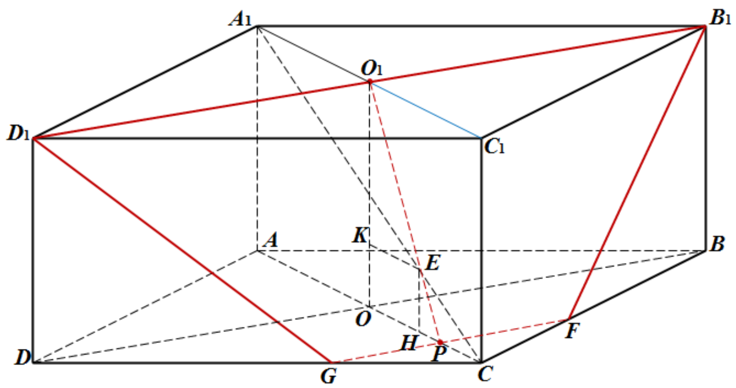
Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной 2, а высота параллелепипеда равна 1. Точка E лежит на диагонали CA_1, причем CE=1.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью B_1D_1E

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью $A_1B_1C_1$.



а) α – плоскость (B_1D_1E).

$B_1D_1 \in \alpha \cap O_1 \in B_1D_1 \Rightarrow O_1 \in \alpha$.

$O_1 \in \alpha \cap E \in \alpha \Rightarrow O_1E \in \alpha$.

$O_1 \in A_1C_1 \cap A_1C_1 \in (A_1C_1C) \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1 \in (A_1C_1C)$;

$E \in A_1C \cap A_1C \in (A_1C_1C) \Rightarrow$

$\Rightarrow E \in (A_1C_1C) \Rightarrow O_1E \in (A_1C_1C)$.

Значит O_1E – линия пересечения плоскостей α и (A_1C_1C). А т.к. $AC \in (A_1C_1C)$, то O_1E пересекает AC в точке P. AC – лежит в плоскости основания $ABCD$, значит P – точка пересечения O_1E с основанием $ABCD$. $O_1P \in \alpha$, и поэтому лежит на линии пересечения плоскости α с основанием $ABCD$. $(ABCD) \| (A_1B_1C_1D_1)$, B_1D_1 линия пересечения верхнего основания с плоскостью α, значит, α пересекает нижнее основание по прямой, проходящей через точку P, параллельной B_1D_1. Проводим эту прямую, которая пересечёт рёбра BC и CD в точках F и G соответственно. B_1F и D_1G – линии пересечения плоскостью α граней BB_1C_1C и CC_1D_1D соответственно. Сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью B_1D_1E построено. Это четырёхугольник B_1D_1GF.

б) $A_1C = \sqrt{AD^2 + AB^2 + AA_1^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = 3$, т.е. $CE = \frac{1}{3}A_1C$. Проведём перпендикуляр EH к AC. $EH \| AA$ и $\Delta ECH \sim \Delta A_1CA$. Поэтому $EH = \frac{1}{3}AA_1 = \frac{1}{3}$, $CH = \frac{1}{3}AC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. $OC = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2}$. $OH = OC - CH = \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Проведём $EK \| OH$. $EK = OH = \frac{\sqrt{2}}{3}$. $OK = EH = \frac{1}{3}; O_1K = O_1O - OK = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

$\angle O_1EK = \beta$. $\operatorname{tg}\beta = \frac{O_1K}{ER} = \frac{2}{3} : \frac{\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$. $\beta = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$. Докажем, что β и есть угол между плоскостью сечения и плоскостью $A_1B_1C_1$.

$GF \| B_1D_1 \cap BD \| B_1D_1 \Rightarrow GF \| BD$. $\Delta FCG \sim \Delta BCD$, и т.к. $BC = CD$, то $FC = CG$, O – середина BD, значит P – середина FG.

$BD = CD \cap FC = CG \Rightarrow BF = DG$, а т.к. $BB_1 = DD_1$, то $\Delta BB_1F = \Delta DD_1G$ по 2-м катетам, и $B_1F = D_1G$, т.е. B_1D_1GF – равнобочная трапеция. Отрезок PO_1, соединяющий середины оснований этой трапеции – высота этой трапеции, т.е. PO_1 – перпендикуляр к B_1D_1 в плоскости α. Диагонали квадрата $A_1B_1C_1D_1$ взаимно перпендикулярны, поэтому C_1O_1 перпендикуляр к B_1D_1 в плоскости $A_1B_1C_1$, т.е. $\angle CO_1C_1$ и есть угол между плоскостью сечения и плоскостью $A_1B_1C_1$. Но $KE \parallel AC \cap AC \parallel A_1C_1 \Rightarrow KE \parallel A_1C_1$, и $\angle CO_1C_1 = \angle O_1EK = \beta$ как накрест лежащие при параллельных EK и O_1C_1 и секущей O_1P.