

исследуйте функцию $f(x) = 2x^2 - x^4 - 1$ и постройте ее график по таким пунктам:

1. область определения;

Функция $f(x) = 2x^2 - x^4 - 1$ – аналитическая, её область определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. Определить функция парная, непарная (или периодическая);

Функция чётная: $f(-a) = 2 \cdot (-a)^2 - (-a)^4 - 1 = 2a^2 - a^4 - 1 = f(a)$.

Функция не периодическая.

3. точки пересечения графика с осями координат;

$f(0) = -1$, точка $(0; -1)$ – точка пересечения с осью ординат.

Найдём точки пересечения с осью абсцисс. $2x^2 - x^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1; x_1 = -1, x_2 = 1$. Точки $(-1; 0)$ и $(1; 0)$ – точки пересечения с осью абсцисс.

4. производная и критические точки;

$y' = (2x^2 - x^4 - 1)' = 4x - 4x^3; 4x - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-1) = 0$. Критические точки: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Значения функции в этих точках мы нашли при определении точек пересечения графика с осями координат.

5. промежутки возрастания и спада функции и точки экстремума;

Для определения промежутков возрастания и убывания и точек экстремума составим таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$
y'	$> 0 (+)$	$< 0 (-)$	$> 0 (+)$	$< 0 (-)$
y	Возрастает $\uparrow$	Убывает $\downarrow$	Возрастает $\uparrow$	Убывает $\downarrow$

Производная может менять знак только при переходе через критические точки, поэтому для определения знака производной, например на интервале $(-\infty; -1)$, достаточно взять из этого интервала любую точку, например $x = -2$.

$y'(-2) = -8 + 32 = 24 > 0$. Аналогично, на интервале $(-1; 0)$ берём точку $x = -0,5$.

$y'(-0,5) = -2 + 0,5 = -1,5 < 0$. Т.к. функция $f(x)$ – чётная, то на интервале $(0; +\infty)$ она ведёт себя симметричным образом относительно оси ординат, поэтому $f(x)$ возрастает на $(0; 1)$ и убывает на $(1; +\infty)$.

При переходе через точку $x = -1$ производная меняет знак с «+» на «-», т.е. $(-1; 0)$ – точка максимума. Аналогично определяем, что $(0; -1)$ – точка минимума и $(1; 0)$ – точка максимума.

6. поведение ф-ции на концах промежутков области определения;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 4x^4 - 1) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - 4x^4 - 1) = -\infty$.

7. если нужно, то найти координаты дополнительных точек, чтоб уточнить поведение гр. ф-ции;

Не знаю, проходили вы это или нет, но на всякий случай, найду ещё точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости.

$$y'' = (4x - 4x^3)' = 4 - 12x^2. \quad y'' = 0 \Rightarrow 4 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad x_1 \text{ и } x_2 - \text{критические точки.}$$

$$f(x_1) = f(x_2) = 2 \cdot \frac{1}{3} - 4 \cdot \frac{1}{9} - 1 = -\frac{7}{9}.$$

Составим ещё одну таблицу:

x	$\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$
y''	$< 0 (-)$	$> 0 (+)$	$< 0 (-)$
y	Выпукла $\cap$	Вогнута $\cup$	Выпукла $\cap$

При переходе через точку $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ функция меняет выпуклость на вогнутость, а при

переходе через точку $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ – вогнутость на выпуклость, значит точки $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{7}{9}\right)$

и $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{7}{9}\right)$ – точки перегиба (в этих точках касательная к графику функции пере-

ходит с одной стороны графика на другую.

8. на основе проведенного исследования построить график функции.

