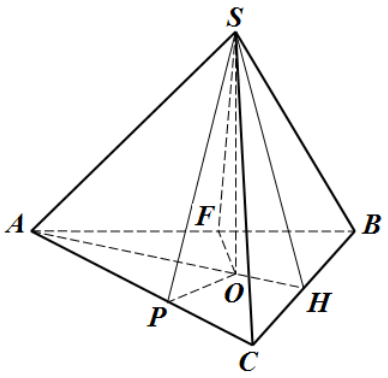
1. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с углом α при вершине и боковой стороной b. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если все двугранные при основании пирамиды равны β.



Основание пирамиды – ΔABC, у которого $AB = AC = b$, $\angle CAB = \alpha$. На рисунке O – проекция вершины пирамиды S на плоскость основания ABC. SH, SP и SF – апофемы боковых граней BSC и ASC соответственно, OH, OP и OF – их проекции на плоскость основания. В пирамиде двугранный угол между боковой гранью и основанием равен плоскому углу между апофемой этой грани и её проекцией на плоскость основания. Поэтому $\angle SFO = \angle SPO = \angle SHO = \beta$.

Т.к. наклонные SH, SP и SF проведены к плоскости основания из одной точкой и составляют с основанием равные углы то они равны: $SF = SH = SP$, а значит, равны и их проекции: $OF = OH = OP$. Поскольку $SF \perp AB$, $SH \perp BC$ и $SP \perp AC$, то $OF \perp AB$, $OH \perp BC$ и $OP \perp AC$. Значит OH, OP и OF – радиусы окружности, вписанной в треугольник ABC.

Найдём площадь основания $S_{осн.}$ и его полупериметр p.

$$S_{осн.} = \frac{1}{2} b^2 \cdot \sin\alpha .$$

Докажем, что $CH = BH$. O – центр окружности, вписанной в ΔABC и поэтому O – точка пересечения биссектрис этого треугольника. Следовательно, OC и OB – биссектрисы равных углов ACB и ABC $\Rightarrow \angle OCB = \angle OBC$, т.е. ΔBOC – равнобедренный, OH – высота к основанию этого треугольника, а значит, и медиана, и $CH = BH$. Далее, $CH = AC \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = b\sin\frac{\alpha}{2}$. Полупериметр равнобедренного треугольника – это сумма боковой стороны и половины основания:

$$p = AC + CH = b + b\sin\frac{\alpha}{2} = b\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Но тогда $S_{осн} = pr = b\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right) r$, где $r = OF = OH = OP$ – радиус вписанной окружности и поэтому $b\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right) r = \frac{1}{2} b^2 \sin\alpha \Leftrightarrow r = \dfrac{b\sin\alpha}{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}$.

$$SP = SH = SF = \frac{OP}{\cos\beta} = \frac{r}{\cos\beta} = \frac{b\sin\alpha}{\cos\beta\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Площади боковых граней ASC и ASB: $S = \dfrac{AC \cdot SP}{2} = \dfrac{b^2 \sin\alpha}{2\cos\beta\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Площадь боковой грани BSC: $S_{BSC} = \dfrac{BC \cdot SH}{2} = CH \cdot SH = \dfrac{b^2 \sin\alpha \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\beta\left(1+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

Площадь полной поверхности:

$$S_{полн.} = S_{осн.} + 2S + S_{BCC} = \frac{b^2 \sin\alpha}{2} + \frac{b^2 \sin\alpha}{\cos\beta\left(1+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)} + \frac{b^2 \sin\alpha \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\beta\left(1+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{b^2 \sin\alpha}{2} + \frac{b^2}{\cos\beta} = \frac{b^2(\sin\alpha\cos\beta + 2)}{2\cos\beta}.$$