4. Найдите наибольшее и наименьшее целое число, удовлетворяющее системе неравенств $\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2+8x-3} < 9, \\ \sqrt{1+x} < 2. \end{cases}$

Подкоренное выражение должно быть неотрицательным. Поэтому

$$1 + x \geq 0$$

$$x \geq -1$$

Делаем преобразования

$$\begin{cases} 3^{x^2-8x+3} < 3^2 \\ 1 + x < 2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 3 < 2 \\ x < 3 \end{cases}$$

Работаем с первым неравенством

$$x^2 - 8x + 1 < 0$$

Решаем уравнение

$$x^2 - 8x + 1 = 0$$

$$D = 8^2 - 4 = 60$$

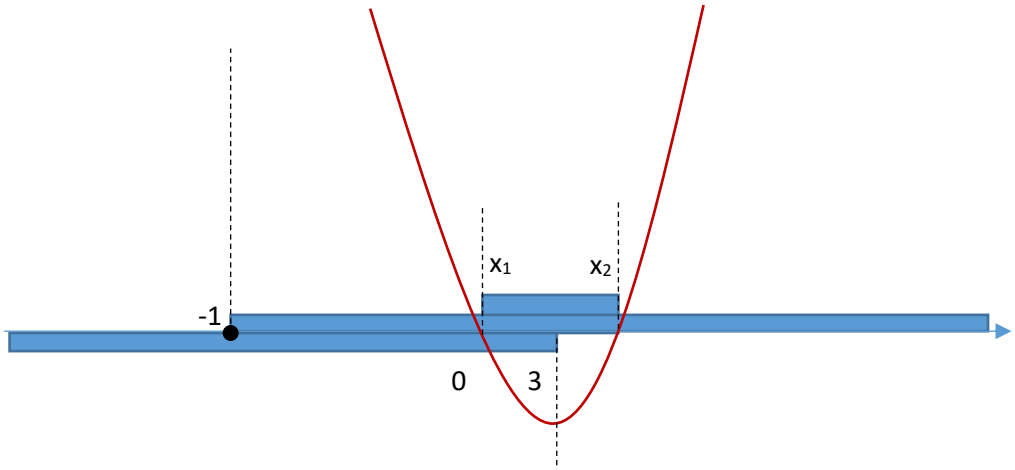
$$x_1 = \frac{8 - 2\sqrt{15}}{2} = 4 - \sqrt{15}\ (\approx 0.13)$$

$$x_2 = \frac{8 + 2\sqrt{15}}{2} = 4 + \sqrt{15}\ (\approx 7.87)$$

Ветви параболы направлены вверх, поэтому неравенству будут удовлетворять значения между x_1 и x_2. Окончательно имеем

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 3 \\ x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

Отображаем найденные решения на числовой прямой:



Видно, что общим решением будет

$$x \in (4 - \sqrt{15}; 3)$$

Находим наибольшее и наименьшее числа на этом интервале

$$x_{max} = 2; \quad x_{min} = 1$$

Ответ: 2; 1