Задача

Велосипедист проехал первую половину пути со скоростью 16 км/ч. Далее половину оставшегося времени он ехал со скоростью 12 км/ч, а потом до конца пути шел пешком со скоростью 5 км/ч. Определить среднюю скорость движения на всем пути.

Решение.

Сначала общие соображения. Итак, что требуется найти. По определению, если движущийся объект преодолел участок пути длинной S за время t, то средняя скорость движения на участке равна.

$$\langle v \rangle = \frac{S}{t} \tag{1}$$

Вот от этого и будем плясать. Длина всего пути, как и время нам неизвестна, но нам требуется найти только соотношение между ними. Посмотрим, что можно сделать. Можно время прохождения соответствующего участка пути выразить через длину участка и скорость. Если при этом мы длину участка выразим через полную длину пути S есть надежда, что неизвестная S сократится, и мы получим выражение, зависящее только от скорости.

Согласно вышесказанному время затраченное на преодоление первого участка пути.

$$t_1 = \frac{S/2}{v_1} = \frac{S}{2 \cdot 16} = \frac{S}{32} \tag{2}$$

Если путь выражен в километрах, а скорость в км/ч, то время соответственно получается в часах.

Далее. У нас остается половина пути $\frac{S}{2}$, которая преодолевалась велосипедистом с разными скоростями: v_2=12 км/ч и v_3=5 км/ч. Соответственно мы можем обозначить промежутки времени, в течение которых велосипедист двигался с этими скоростями.

$$t_2 = \frac{S_2}{v_2} = \frac{S_2}{12} \tag{3}$$

$$t_3 = \frac{S_3}{v_3} = \frac{S_3}{5} \quad (4)$$

При этом известно что время t_2 равно t_3. А так же:

$$S_2 + S_3 = \frac{S}{2} \quad (5)$$

Т. е. Получаем некоторое подобие системы:

$$\begin{cases} t_2 = t_3 \\ S_2 + S_3 = \frac{S}{2} \end{cases} \quad (6)$$

Мы можем выразить S_2 и S_3 в (3), (4) через t_2, t_3.

$$S_2 = v_2 \cdot t_2 = 12 \cdot t_2 \quad (7)$$

$$S_3 = v_3 \cdot t_3 = 5 \cdot t_3 \quad (8)$$

Теперь, подставив в (6) выражения (7), (8), получим такую систему:

$$\begin{cases} t_2 = t_3 \\ 12 t_2 + 5 t_3 = \frac{S}{2} \end{cases} \quad (9)$$

Из системы (9) можно выразить t_2 и t_3 через S. Решаем подстановкой.

$$12 t_2 + 5 t_2 = \frac{S}{2}$$

$$17 t_2 = \frac{S}{2}$$

$$t_2 = \frac{S}{34}$$

Таким образом получаем выражения для t_2 и t_3.

$$t_2 = t_3 = \frac{S}{34} \quad (10)$$

Теперь используя формулы (1), (2), (10) мы можем записать выражение для средней скорости на всем пути:

$$\langle v \rangle = \frac{S}{t} = \frac{S}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{S}{S/32 + S/34 + S/34} = \frac{S}{S(1/32 + 1/17)} = \frac{32 \cdot 17}{17 + 32} \approx 11{,}1 \quad (11)$$

Итак как и предполагалось S благополучно сократилось и получилось, что при данных условиях средняя скорость велосипедиста равна:

$$\langle v \rangle \approx 11{,}1\, км/ч$$