Решите неравенство $\dfrac{\log_{9^{x-6}}(x+2)}{\log_{9^{x-6}} x^2} < 1$

Поскольку логарифм существует только для положительных чисел, то должны выполняться следующие условия

$$\begin{cases} x+2>0 \\ x^2>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$x \in (-2; 0) \cup (0;\ \infty)$$

Также по определению основание логарияма должно быть положительным и неравным единице.

$$9^{x-6} \text{ положительно при любых } x$$

$$9^{x-6} = 1 \text{ при } x = 6$$

Знаменатель не должен быть равен нулю

$$\log_{9^{x-6}} x^2 \neq 0$$

$$(9^{x-6})^0 \neq x^2$$

$$x^2 \neq 1$$

$$x \neq \pm 1$$

Итак, область определения

$$x \in (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1;\ 6) \cup (6;\ \infty)$$

Применяя формулу перехода к новому основанию, получаем

$$\frac{\log_{9^{x-6}}(x+2)}{\log_{9^{x-6}} x^2} = \log_{x^2}(x+2)$$

Следовательно

$$\log_{x^2}(x+2) < 1$$

Решаем уравнение

$$\log_{x^2}(x+2) = 1$$

Исходя из определения логарифма, получаем

$$x + 2 = x^2$$

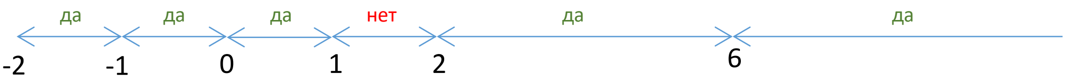
$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = \sqrt{1 - 4 \cdot (-2)} = 3$$

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \text{ (не принадлежит области определения)}$$

$$x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

Отмечаем на числовой прямой и определяем знаки интервалов



$x = -1.5; \quad \log_{2,25}(0,5) < 1 \quad -$ да

$x = -0.5; \quad \log_{0,25}(1,5) < 1 \quad -$ да

$x = 0.5; \quad \log_{0,25}(2,5) < 1 \quad -$ да

$x = 1.5; \quad \log_{2,25}(3,5) < 1 \quad -$ нет

$x = 3; \quad \log_{9}(5) < 1 \quad -$ да

$x = 7; \quad \log_{49}(9) < 1 \quad -$ да

Таким образом, окончательное решение имеет вид

$$x \in (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2;\ 6) \cup (6;\ \infty)$$