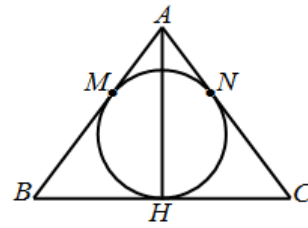


В равнобедренный $\triangle ABC$ с основанием BC вписана окружность. Она касается стороны AB в точке M . Найти радиус этой окружности, если $AM=10$; $BM=15$.



M и H – точки касания окружности со сторонами AB и BC соответственно. По теореме о касательных из одной точки $BH = BM = 15$, $AN = AM = 10$.

$$AB = AM + BM = 10 + 15 = 25.$$

$\triangle ABC$ – равнобедренный с

основанием BC , и $AC = AB = 25$. $NC = AC - AN = 25 - 10 = 15$. По теореме о касательных из одной точки $CH = NC = 15$. Т.к. $BH = CH = 15$, то AH – медиана и высота треугольника ABC . $BC = BH + CH = 15 + 15 = 30$.

По теореме Пифагора

$$AH^2 + BH^2 = AB^2; AH^2 = AB^2 - BH^2 = 25^2 - 15^2 = 625 - 225 = 400; AH = 20.$$

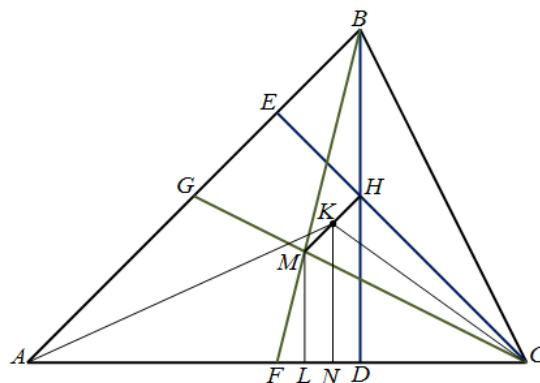
$$S_{\triangle ABC} = \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{30 \cdot 20}{2} = 300.$$

С другой стороны $S_{\triangle ABC} = pr$, где p – полупериметр треугольника ABC , r – радиус окружности, вписанной в $\triangle ABC$. $p = AB + BH = 25 + 15 = 40$.

$$40r = 300 \Rightarrow r = 7,5.$$

Радиус окружности, вписанной в $\triangle ABC$: $40r = 300 \Rightarrow r = 7,5$.

1) Высоты $\triangle ABC$ пересекаются в точке H , а медианы — в точке M . Точка K — середина отрезка MH . Найти площадь треугольника AKC , если $AB = 6$; $CH = 3$; $\angle BAC = 45^\circ$.



H — точка пересечения высот BD и CE треугольника ABC , M — точка пересечения медиан BF и CG треугольника ABC . $\triangle ABD$ — прямоугольный ($\angle ADB = 90^\circ$), и т.к. $\angle BAD = 45^\circ$, то

$$AD = AB \cdot \cos 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}; \quad BD = AB \cdot \sin 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

$\triangle AEC$ — прямоугольный ($\angle AEC = 90^\circ$). Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° :

$\angle ECA + \angle EAC = 90^\circ$; $\angle ECA = 90^\circ - \angle EAC$; $\angle ECA = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. $\triangle HDC$ — прямоугольный ($\angle HDC = 90^\circ$), и т.к. $\angle HCD = 45^\circ$, то

$$HD = CH \cdot \sin 45^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}; \quad CD = CH \cdot \cos 45^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$AC = AD + CD = 3\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

Проведём $ML \perp AC$. У прямоугольных треугольников MFL и BFD общий острый угол BFD , и $\triangle MFL \sim \triangle BFD$ по 1-му признаку подобия прямоугольных треугольников (по острому углу). Поэтому $\frac{ML}{BD} = \frac{MF}{BF} = \frac{1}{3} \Rightarrow ML = \frac{1}{3}BD = \sqrt{2}$.

KN — высота треугольника AKC . Т.к. $ML \perp AC$, $KN \perp AC$, $HD \perp AC$, то $ML \parallel KN \parallel HD$. И т.к. K — середина MH , то KN — средняя линия трапеции $DLMH$,

поэтому $KN = \frac{ML + HD}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{5\sqrt{2}}{4}$. Площадь треугольника AKC :

$$S_{\triangle AKC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot KN = \frac{1}{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{45}{8}.$$