http://znanija.com/task/20891714

исследовать на условный экстремум функцию f при данных условиях f(x;y)=x^2+y^2, $x^2+y^2-xy=1$

$$z=f(x,y)=x^2+y^2 \tag{1}$$

$$x^2+y^2-xy-1=0 \tag{2}$$

Предварительные соображения

$z=f(x,y)=x^2+y^2$ Задает «круговой» параболоид с вершиной в начале координат.

Уравнение $x^2+y^2-xy-1=0$ задает некоторую линию на плоскости ***xy*** и «хитросделанную» цилиндрическую поверхность в пространстве. Анализ уравнения (2) (*Это отдельная песня. Там использовалось приведение уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду*.) показывает, что на плоскости ***xy*** это эллипс повернутый на 45° относительно начала координат (Рисунок 1). Приведение (2) к каноническому виду даёт уравнение эллипса:

$$\frac{\tilde{x}^2}{2}+\frac{3\tilde{y}^2}{2}=1 \tag{3}$$

$$\frac{\tilde{x}^2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{\tilde{y}^2}{(\sqrt{2/3})^2}=1 \tag{4}$$

Его полуоси равны.

$$a=\sqrt{2}\approx 1,41$$
$$b=\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0,82 \qquad (5)$$

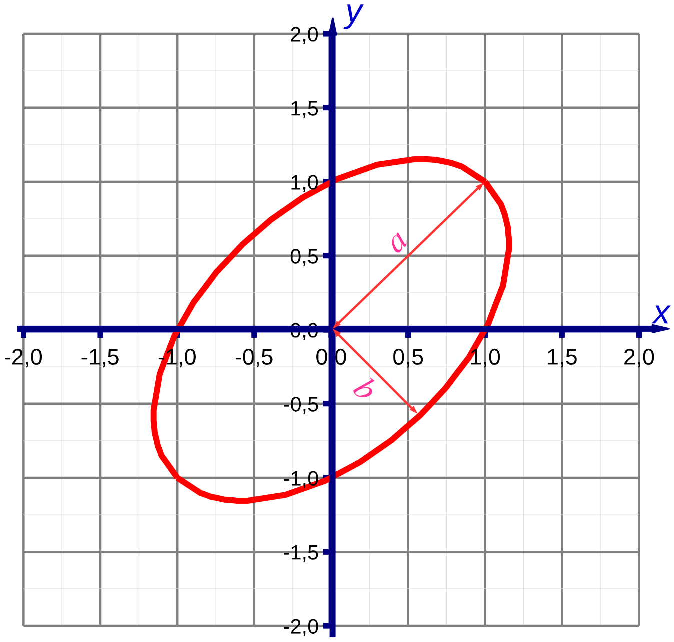

Рисунок 1: Линия уровня условия на плоскости XY (направляющая цилиндра)

В пространстве соответственно получаем, что (2) задает эллиптический цилиндр.

Экстремум требуется найти на пересечении поверхностей параболоида и цилиндра. (Вот как это ещё нарисовать, чтоб понятно было ….)

РЕШЕНИЕ.

Поиск точек подозрительных на условный экстремум.

Рассматриваем заданную функцию

$$f(x,y)=x^2+y^2 \qquad (6)$$

И функцию условия

$$\phi(x,y)=x^2+y^2-xy-1 \qquad (7)$$

Из этих функций строится так называемая функция Лагранжа

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\,\phi(x,y) \qquad (8)$$

Где λ числовой параметр, подбираемый из дополнительного условия.

Координаты точек подозрительных на экстремум должны удовлетворять системе уравнений получаемой с помощью функции Лагранжа.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=0 \end{cases} \qquad (9)$$

Подставляем в (8) выражения для функции (6) и условия (7).

$$F(x,y)=x^2+y^2+\lambda(x^2+y^2-xy-1) \qquad (10)$$

А затем находим частные производные функции Лагранжа.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x}=2x+2\lambda x-\lambda y=2(1-\lambda)x-\lambda y \\ &\frac{\partial F}{\partial y}=2y+2\lambda y-\lambda x=2(1-\lambda)y-\lambda x \\ &\frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-xy-1 \end{aligned} \qquad (11)$$

Приравнивая их к нулю получаем следующий вид системы (9)

$$\begin{cases} 2(1-\lambda)x-\lambda y=0 \\ 2(1-\lambda)y-\lambda x=0 \\ x^2+y^2-xy-1=0 \end{cases} \qquad (12)$$

Система из 3-х уравнений с 3-мя неизвестными. Решаем систему (12). Из 1-го уравнения системы (12) выражаем ***y*** через ***x*** и ***λ***. И подставляем его выражение во 2-е уравнение.

$$\begin{cases} y=2(1-\lambda)\dfrac{x}{\lambda} \\ 4(1-\lambda)^2\dfrac{x}{\lambda}-\lambda x=0 \\ x^2+y^2-xy-1=0 \end{cases} \qquad (13)$$

Далее преобразовываем 2-е уравнение (13) получаем

$$x\left(\frac{4(1+\lambda)^2}{\lambda}-\lambda\right)=0 \qquad (14)$$

Из уравнения (14) следует:

$$x=0, \quad или$$
$$\frac{4(1+\lambda)^2}{\lambda}-\lambda=0 \qquad (15)$$

Значение ***x=0*** отбрасываем, поскольку оно не удовлетворяет 3-му уравнению (12), (13) (получается -1=0).

NB. Кроме того можно также заключить, что $\lambda\neq 0$ ибо в противном случае из 1-го уравнения системы (12) следует, что $x=0$, а из 2-го уравнения (12) следует $y=0$, но тогда 3-е уравнение (12) не имеет решений.

Итак рассматриваем случай

$$\frac{4(1+\lambda)^2}{\lambda}-\lambda=0$$
$$\lambda\neq 0 \qquad (16)$$

Решаем уравнение (16) относительно ***λ***.

$$4(1+\lambda)^2-\lambda^2=0$$

$$3\lambda^2+8\lambda+4=0 \qquad (17)$$

Уравнение (17) – обычное квадратное уравнение. Оно имеет два корня

$$\lambda_1=-2$$
$$\lambda_2=-\frac{2}{3} \qquad (18)$$

Теперь, если подставить $\boldsymbol{\lambda_1}$ в 1-е или 2-е уравнение (12), получим соотношение

$$y=x \qquad (19)$$

А если подставить $\boldsymbol{\lambda_2}$ в 1-е или 2-е уравнение (12), получим соотношение

$$y=-x \qquad (20)$$

Подставим вместо ***y*** его выражение через ***x*** (19) в 3-е уравнение (12). Получаем

$$x^2+x^2-x^2-1=0$$

$$x^2-1=0 \qquad (21)$$

Решение (21) даёт два значения **x**.

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -1 \end{aligned} \tag{22}$$

И согласно (19) получаем два соответствующих им значения **y**.

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= -1 \end{aligned} \tag{23}$$

Аналогичным образом подстановкой (20) в 3-е уравнение (12) получаем ещё два возможных значения **x**.

$$\begin{aligned} x_3 &= \sqrt{\frac{1}{3}} \\ x_4 &= -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{aligned} \tag{24}$$

И согласно выражению (20) получаем два соответствующих им значения **y**.

$$\begin{aligned} y_3 &= -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ y_4 &= \sqrt{\frac{1}{3}} \end{aligned} \tag{25}$$

Таким образом, получаем 4 точки.

$$\begin{aligned} A &= (1;\ 1) \\ B &= (-1;\ -1) \\ C &= \left(\sqrt{\frac{1}{3}};\ -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \\ D &= \left(-\sqrt{\frac{1}{3}};\ \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \end{aligned} \tag{26}$$

Подозреваю, что A и B максимумы, а C и D соответственно минимумы. Пока доказать строго математически не могу. Но есть некоторые соображения.

Фактически пересечением данных нам параболоида и эллиптического цилиндра будет волнистая замкнутая линия с 2-мя максимумами и 2-мя минимумами (Рисунок 2). Визуально в 2-х мерном виде (в проекции на плоскость ***XY***) можно отобразить так (Рисунок 3, Рисунок 4). Если на рисунке с линией условия отметить линии уровня параболоида (это будут окружности с центром в начале координат)

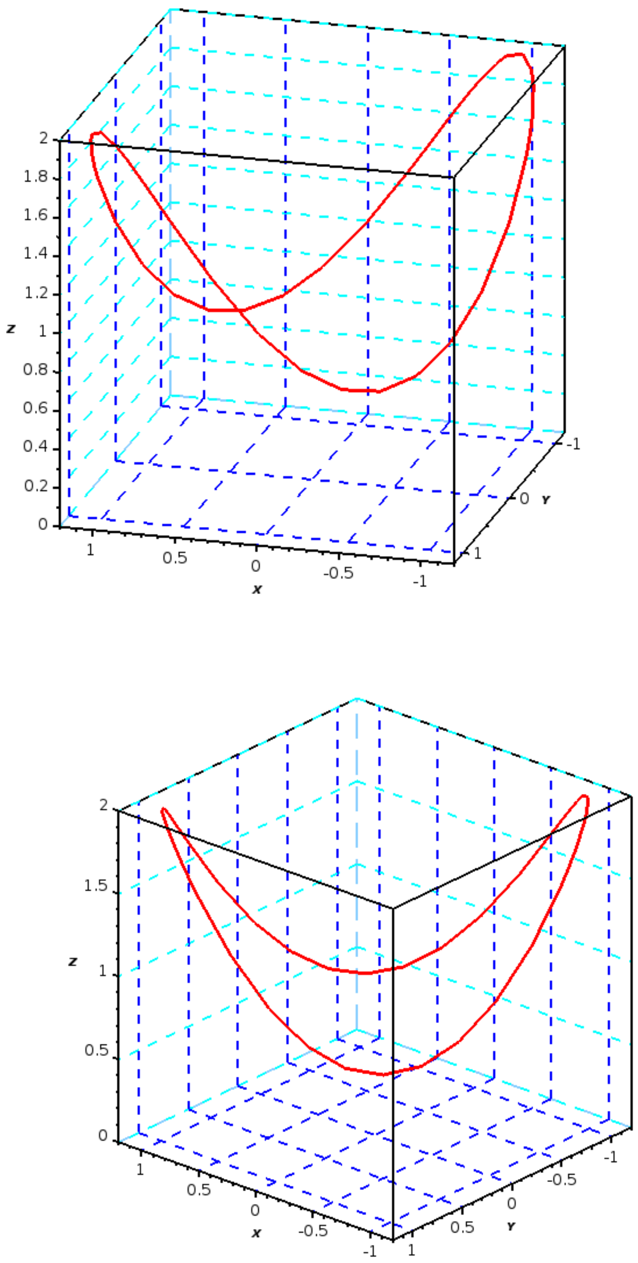

Рисунок 2: Кривая пересечения (Построена в Scilab по 42 расчетным точкам)

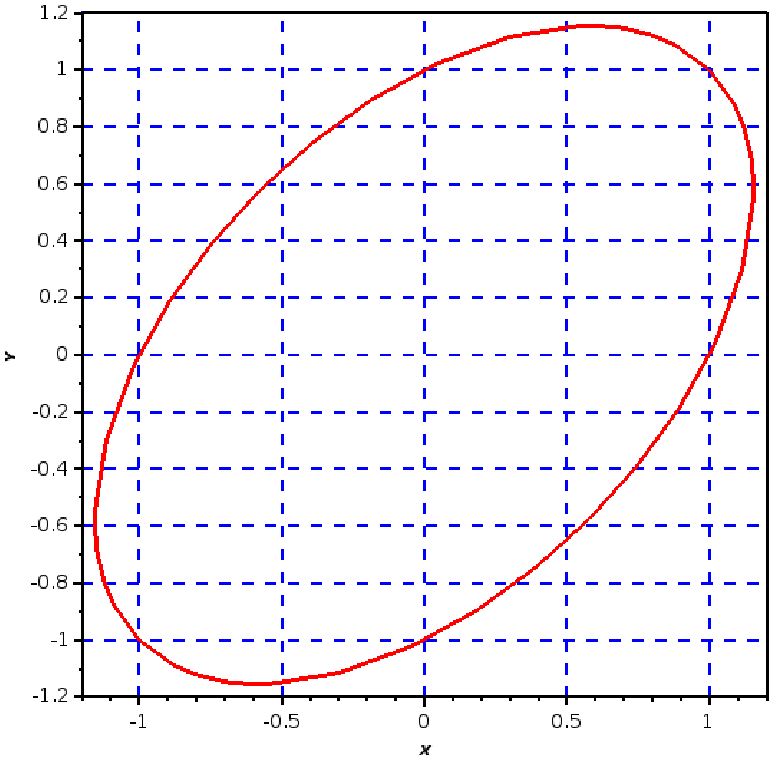

Рисунок 3: Проекция кривой пересечения на плоскость XY. (Построена в Scilab)

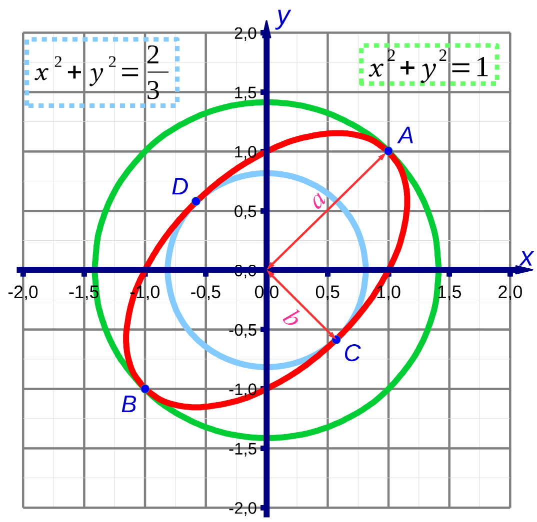

Рисунок 4: Линия условия (направляющая эллиптического цилиндра) и проекции двух линий уровня параболоида на плоскость XY. («Выверт» в электронной таблице)

Точки пересечения (касания) линий уровня параболоида направляющей цилиндра будут проекциями соответствующих точек кривой пересечения. Проекция линии пересечения поверхностей совпадет с направляющей цилиндра (т. е. Будет эллипсом).

ОТВЕТ

В точках ***A*** и ***B*** функция $f(x, y)=x^2+y^2$ будет равна квадрату большой полуоси эллипса $f(x, y)=a^2=2$. Это максимумы.

Т. е. На исследуемой кривой это будут точки

$A_1=(1;\ 1;\ 2)$
$B_1=(-1;-1;\ 2)$

В точках ***C*** и ***D*** функция $f(x, y)=x^2+y^2$ будет равна квадрату малой полуоси эллипса $f(x, y)=b^2=2/3$ Это минимумы.

Т. е. На исследуемой кривой это будут точки

$$C_1=\left(\sqrt{\frac{1}{3}};\ -\sqrt{\frac{1}{3}};\ \frac{2}{3}\right)$$

$$D_1=\left(-\sqrt{\frac{1}{3}};\ \sqrt{\frac{1}{3}};\ \frac{2}{3}\right)$$