*Дана функция* y(x) = -2x3 + 6x2 + 1.

1) Область определения функции. Так как функция не имеет дроби или корня, то нет ограничения в области её определения.

D(y) = (−∞; +∞).

2) Четность и нечетность функции:

Проверим функцию - четна или нечетна с помощью соотношений f(x)=f(-x) и f(x)=-f(x). Итак, проверяем: $f\left(-x\right)=-2\*\left(-x\right)^{3}+ 6\*\left(-x\right)^{2}+1=2x^{3}+6x^{2}+1\ne f\left(x\right)\ne -f\left(x\right).$

3начит, функция не является ни чётной, ни нечётной.

3) Определим точки пересечения графика функции с осями координат.

Найдем точки пересечения с осью ординат Oy, для чего приравниваем x = 0: у = -2\*03 + 6\*02 + 1 = 1.

Таким образом, точка пересечения с осью Oy имеет координаты (0; 1).

Найдем точки пересечения с осью абсцисс Ox, для чего надо решить кубическое уравнение -2x3 + 6x2 + 1 = 0.

Для вычисления корней данного кубического уравнения используем формулы Кардано.
Для начала нам надо привести наше уравнение до вида:

 $y^{3}+py+q=0.$

В этом нам помогут следующие формулы:

$p=-\frac{b^{2}}{3a^{2}}+\frac{c}{a};$ $q=\frac{2b^{3}}{27a^{3}}-\frac{bc}{3a^{2}}+\frac{d}{a}$.

где a - коэффициент при x3, a = -2,

b - коэффициент при x2, b = 6,

c - коэффициент при x, c = 0,

d - свободный член, d = 1.

Подставив наши значения в данные формулы, мы получим:

$$p=-\frac{6^{2}}{3\*\left(-2\right)^{2}}+\frac{0}{-2}=-3; q=\frac{2\*6^{3}}{27\*\left(-2\right)^{3}}-\frac{6\*0}{3\*\left(-2\right)^{2}}+\frac{1}{-2}=-2,5.$$

Потом, использовав формулу $Q=\left(\frac{p}{3}\right)^{3}+\left(\frac{q}{2}\right)^{2} $вычислим количество корней кубического уравнения. $Q=\left(\frac{-3}{3}\right)^{3}+\left(\frac{-2,5}{2}\right)^{2}=0,5625.$

Если:

Q > 0 — один вещественный корень и два сопряженных комплексных корня;

Q < 0 — три вещественных корня;

Q = 0 — один однократный вещественный корень и один двукратный, или, если p = q = 0, то один трехкратный вещественный корень.

В нашем случае Q = 0,5625, будем иметь один вещественный корень и два сопряженных комплексных корня.

А сами корни найдём по следующим формулам:

$$x\_{1}=α+β-\frac{b}{3a};$$

$$x\_{2,3}=-\frac{α+β}{2}-\frac{b}{3a}\mp i\frac{α-β}{2}\sqrt{3} ;$$

где $α=\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{Q}\right)^{\frac{1}{3}} , β=\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{Q}\right)^{\frac{1}{3}}.$

Подставив наши значения в вышеуказанные формулы вычислим, что:

α = 1,2599, β = 0,7937.

x1= 3,0536; x2,3 = -0,0268 ± *i*·0,4038.

4) Стационарные точки, интервалы возрастания и убывания функции, экстремумы функции

Исследуем функцию на экстремумы и монотонность. Для этого найдем первую производную функции: y’ = (-2x3 + 6x2 + 1)’ = -6x2 + 12х = -6х(x - 2).

Приравняем первую производную к нулю и найдем стационарные точки (в которых y′=0: -6х(x - 2) = 0, x1 = 0, х2 = 2.

Получили две критических точки: х = 0 и х = 2.

Разобьем всю область определения функции на интервалы данными точками и определим знаки производной в каждом промежутке:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x = | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y' = | -18 | 0 | 6 | 0 | -18 |

При x ∈ (0; 2) производная y′ > 0, поэтому функция возрастает на данном промежутке.

При x ∈ (-∞; 0) U (2; ∞) производная y′ Б 0, функция убывает на данных промежутках. При этом x = 2 - точка локального максимума (функция возрастает, а потом убывает, x = 0 - точка локального минимума (функция убывает, а потом возрастает.

Значение функции в этих точках: у(0) = 1, у(2) = 9.

5) Выпуклость и точки перегиба.

Вычисляем вторую производную.

y’’(x) = (-6x2 + 12x)’ = -12x + 12.

Приравниваем её нулю: -12х + 12 = 0 или -12(х - 1) = 0.

Отсюда находим точку перегиба графика функции:

х - 1 = 0,

х = 1.

Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции. y’’(x) = -12x + 12.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  x = | 0 | 1 | 2 |
| y' = | 12 | 0 | -12 |

 Если вторая производная  на интервале, то график функции  является выпуклым на данном интервале.

Если вторая производная  на интервале, то график функции  является вогнутым на данном интервале.

Функция выпукла вверх на интервале (1; +∞), выпукла вниз на интервале (-∞; 1).

6) Асимптоты.

Так как $\lim\_{x\to \infty }\frac{y}{x}=\lim\_{x\to \infty }\frac{-2x^{3}+6x^{2}+1}{x}=\lim\_{x\to \infty }-2x^{2}+6x+\frac{1}{x}=\infty $, асимптот нет

7) Дополнительные точки для построения графика функции

y(x) = -2x3 + 6x2 + 1:

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **y** |
| -1.5 | 21.3 |
| -1.0 | 9 |
| -0.5 | 2.8 |
| 0 | 1 |
| 0.5 | 2.3 |
| 1.0 | 5 |
| 1.5 | 7.8 |
| 2.0 | 9 |
| 2.5 | 7.3 |
| 3.0 | 1 |
| 3.5 | -11.2 |
| **x** | **y** |
| -1.5 | 21.3 |
| -1.0 | 9 |
| -0.5 | 2.8 |
| 0 | 1 |
| 0.5 | 2.3 |

8) По полученным данным строим график, и отметим характерные точки (пересечения с осями и экстремумы).

