I САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА К МОДУЛЮ №3

Вариант №1

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(X,Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$;

б) $(X,Y) = 10x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 23 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}: \qquad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}: \qquad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Вариант №2

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 14 \\ 29 \\ -22 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}: \qquad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}: \qquad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

6. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Вариант №3

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}: \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}: \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

6. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант №4

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -50 \\ -41 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -1` \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}: \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}:\quad \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}7\\-5\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}-4\\0\\-3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}0\\8\\4\end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}0\\3\\9\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}3\\7\\4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}8\\7\\0\end{pmatrix}.$$

6. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}9\\0\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}4\\3\\7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}0\\8\\7\end{pmatrix}.$$

Вариант №5

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}: \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}: \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

6. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Вариант №6

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}: \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}: \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 15 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант №7

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 25 \\ -29 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}: \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}: \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

6. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Вариант №8

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 17 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 33 \\ 42 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}:\quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}:\quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису

$\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}; \; \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

6. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант №9

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} -9 \\ 48 \\ 66 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}: \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -1` \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}: \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

6. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Вариант №10

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 65 \\ 7 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}: \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}: \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Вариант №11

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}: \ \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}: \ \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

6. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Вариант №12

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(X,Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$;

б) $(X,Y) = 10x_1 y_1 + 3x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 2x_2 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_3 y_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} -22 \\ 29 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}: \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}: \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

6. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Вариант №13

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}: \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}: \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 15 \end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

6. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант №14

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} -41 \\ -50 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}: \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}:\quad \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}3\\5\\9\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}4\\-3\\7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}2\\10\\0\end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}-1\\-5\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}5\\9\\14\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}.$$

6. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}5\\9\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}-3\\7\\4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}10\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Вариант №15

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 21 \\ 14 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}: \ \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}:\ \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}3\\8\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}5\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_2,\ \boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1,\ \boldsymbol{B}_2,\ \boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}9\\0\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}4\\3\\7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}0\\8\\7\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}3\\5\\9\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}4\\-3\\7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}2\\10\\0\end{pmatrix}.$$

6. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}.$$

Вариант №16

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 50 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}: \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}: \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_2,\ \boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1,\ \boldsymbol{B}_2,\ \boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

6. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант №17

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -1` \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} -29 \\ 25 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}: \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}:\quad \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}3\\10\\6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}-1\\5\\-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}7\\-4\\15\end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}8\\9\\9\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}2\\8\\9\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}-9\\5\\0\end{pmatrix}.$$

6. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}7\\-5\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}-4\\0\\-3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}0\\8\\4\end{pmatrix}.$$

Вариант №18

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2+\boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1+3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2+3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1+2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3+\boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2+\boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}3\\9\\5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}4\\7\\-3\end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}14\\3\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}-2\\8\\17\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\14\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}18\\42\\33\end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}-7\\6\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix}\quad \text{и вектор}\quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}4\\-5\\2\end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}:\quad \boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}-5\\3\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}9\\14\\5\end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}: \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_2,\ \boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1,\ \boldsymbol{B}_2,\ \boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Вариант №19

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -14 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 66 \\ 48 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}: \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}: \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

6. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Вариант №20

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 32 \\ 7 \\ 65 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}: \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}: \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

6. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Вариант №21

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 23 \\ -3 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}: \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -1` \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}: \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

6. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант №22

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 14 \\ -22 \\ 29 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}: \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}: \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

6. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Вариант №23

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}: \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}: \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_2,\ \boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1,\ \boldsymbol{B}_2,\ \boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} -1` \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

5. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -1` \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Вариант №24

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -41 \\ -50 \end{pmatrix}.$$

2. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \text{и вектор} \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$.

3. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}: \ \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}: \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

4. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Вариант №25

1. Можно ли в трехмерном арифметическом векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ ввести скалярное произведение следующим образом:

а) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$;

б) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 10\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$.

В случаях, когда это возможно вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, их длины и угол между ними, если $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 21 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

3. В базисе $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ заданы векторы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\quad \text{и вектор}\quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

а) Доказать что векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

б) Выразить вектор $\boldsymbol{X}$ в новом базисе.

в) Найти связь между базисами $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ и $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$\{\boldsymbol{A}_i\}:\quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{B}_i\}:\quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$$

базисом пространства $\boldsymbol{R}^3$, и найти матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{A}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{B}_i\}$ пространства $\boldsymbol{R}^3$ и обратно, а также координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

5. Доказать, что существует единственное преобразование пространства $\boldsymbol{R}^3$, переводящего векторы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ соответственно в $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

6. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$