Векторна алгебра. Вектори в системі координат.

1. Координати, довжина і напрямні косинуси вектора.

Для того щоб операції над векторами звести до операції над числами, розглядатимемо вектори в системі координат.

1. Координати вектора. Нехай в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано вектор $\vec{a}$. Це означає, що в ортонормованому базисі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, який задає обрану систему координат, вектор $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, де числа a_x, a_y, a_z – координати вектора $\vec{a}$ в цьому базисі. Але з властивостей проекції випливає, що

$$a_x = np_{Ox}\vec{a}, \quad a_y = np_{Oy}\vec{a}, \quad a_z = np_{Oz}\vec{a}. \qquad (1)$$

Отже, координати вектора в системі координат $Oxyz$ це його проекції на осі координат.

2. Довжина вектора. Вектор $\vec{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда (рис.1) з вимірами $|a_x|$, $|a_y|$, $|a_z|$, тому довжина цього вектора дорівнює

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (2)$$

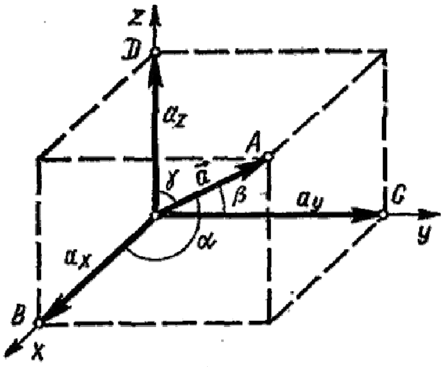


Рис. 1

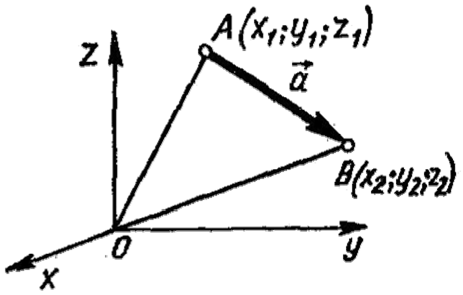


Рис. 2

Якщо початок вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ (рис. 2) міститься в точці $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, а кінець – в точці $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \qquad (3)$$

Тоді з формули (3) знаходимо довжину вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (4)$$

Цією формулою користуються для знаходження *відстані між точками* A і B.

3. Напрямні косинуси вектора. Напрям довільного вектора $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$ визначається кутами α, β, γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат (рис.1):

$$\alpha=\widehat{(\vec{a},\vec{i})}, \qquad \beta=\widehat{(\vec{a},\vec{j})}, \qquad \gamma=\widehat{(\vec{a},\vec{k})}, \qquad 0\le\alpha,\beta,\gamma\le\pi$$

Косинуси цих кутів називаються ***напрямними косинусами***. Формули для напрямних косинусів

$$\cos\ \alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos\ \beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos\ \gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|} \qquad (5)$$

Підносячи обидві частини кожної з рівностей (5) до квадрата і підсумовуючи дістанемо

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1, \qquad (6)$$

тобто сума квадратів напрямних косинусів довільного вектора дорівнює одиниці.

***Приклади*:**

1. Задано точки $A(0; -1; 2)$ і $B(-1; 1; 4)$.
Знайти координати, довжину та напрямні косинуси вектора $|\overrightarrow{AB}|$
З формули (4) і (5) маємо:

$$|\overrightarrow{AB}|=(-1;2;2); \qquad |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1+4+4}=3; \qquad \cos\alpha=-\frac{1}{3}, \qquad \cos\beta=\cos\gamma=\frac{2}{3}.$$

2. Чи може вектор утворювати з осями координат кути $\alpha=\beta=60^\circ,\ \gamma=30^\circ$?

$$\cos^2 60^\circ+\cos^2 60^\circ+\cos^2 30^\circ=\frac{5}{4}\ne 1.$$

тому згідно з формулою (6) дістанемо на це негативну відповідь.

2. Лінійні дії з векторами. Рівність і колінеарність векторів.

1. Лінійні дії з векторами. Якщо відомі координати векторів, то лінійним діям з векторами відповідають відповідні арифметичні дії над їхніми координатами.

Нехай задано вектори $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z),\ \vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$ і дійсне число λ, тоді:

$$\overline{\lambda\alpha}=(\lambda\alpha_x;\lambda\alpha_{y;}\lambda\alpha_z), \quad \vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x;a_y\pm b_y;a_z\pm b_z;).$$

2. Рівність векторів. Нехай вектори $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$, та $\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$ рівні, тобто мають однакові довжини і напрям, тоді

$$a_x=b_x, a_y=b_y, a_z=b_z.$$

3. Колінеарність векторів. Необхідною і достатньою умовою того, що вектори $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$ та $\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$ колінеарні, є пропорціональність їхніх проекцій:

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

3. Поділ відрізка в даному відношенні. Координати центра мас.

Нехай задано відрізок AB точками A (x_1; y_1; z_1) і B (x_2; y_2; z_2). Знайдемо на відрізку таку точку M (x; y; z), яка ділить цей відрізок у відношенні λ, тобто

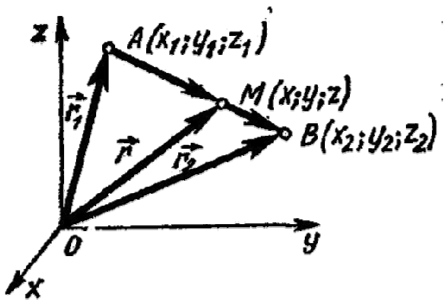
$$\left|\overrightarrow{AM}\right| : \left|\overrightarrow{MB}\right| = \lambda$$

Введемо радіуси-вектори $\vec{r} = \overrightarrow{OA_1} = (x_1; y_1 z_1)$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$, $\vec{r_2} = \overrightarrow{OB} = (x_2; y_2; z_2)$ (рис.3). Оскільки $\overrightarrow{AM} = \vec{r} - \vec{r}_1$, $\overrightarrow{MB} = \vec{r_2} - \vec{r}$, і за умовою $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$, то $\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r_2} - \vec{r})$, звідки

$$\vec{r} = \frac{\vec{r_1} + \lambda\vec{r_2}}{1+\lambda}.$$

Порівнюючи проекції обох частин цієї рівності на осі координат, маємо:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}. \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (7)$$



Зокрема, координати точки, яка ділить відрізок AB навпіл (λ=1), знаходять за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (8)$$

4. Скалярний добуток двох векторів

Означення, геометричний та механічний зміст скалярного добутку.

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a}\cdot\vec{b}$, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi, \qquad (9)$$

З фізики відомо, що робота A сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки з початку в кінець вектора $\vec{S}$, який утворює з вектором $\vec{F}$ кут α (рис. 4), дорівнює $A = \left|\vec{F}\right|\left|\vec{S}\right|\cos\alpha$, або $A = \vec{F}\cdot\vec{S}$. (30)

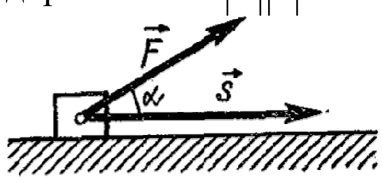


Рис. 4

Отже, робота дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення. В цьому суть механічного змісту скалярного добутку.

Властивості скалярного добутку

У векторному численні величину $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ називають скалярним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ тому, що, по-перше, ця величина є скалярна і, по-друге, має деякі алгебраїчні властивості звичайного добутку чисел.

Розглянемо три *алгебраїчні властивості* скалярного добутку.

1^0. *Комунікативна* властивість множення:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}.$$

2^0. *Асоціативна властивість* відносно множення на число λ:

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

3^0. *Дистрибутивна* властивість відносно додавання векторів:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

4^0. *Якщо $\vec{a}\neq 0$ і $\vec{b}\neq 0$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, коли кут $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ – гострий, і $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, коли кут $\varphi=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ – тупий.*

5^0. *Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори взаємно перпендикулярні.*

6^0. *Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини*

$$\overrightarrow{a^2}=|\vec{a}|^2, \tag{10}$$

звідки

$$|\vec{a}|=\sqrt{\overrightarrow{a^2}}. \tag{11}$$

Приклади

1. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{m}=\overrightarrow{2a}-\overrightarrow{3b}$ і $\vec{n}=\overrightarrow{4a}+\overrightarrow{5b}$, якщо $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{3}.$

Користуючись властивостями 1^0 – 3^0, маємо

$$\vec{m}\cdot\vec{n}=(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(4\vec{a}+5\vec{b})=8\overrightarrow{a^2}+10\vec{a}\cdot\vec{b}-12\vec{a}\cdot\vec{b}-15\overrightarrow{b^2}=$$
$$=8\overrightarrow{a^2}-2\vec{a}\cdot\vec{b}-15\overrightarrow{b^2}.$$

Застосовуючи формули (9) і (10), знаходимо

$$\vec{m}\cdot\vec{n}=8\cdot 1^2-2\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2}-15\cdot 2^2=-54.$$

2. Знайти довжину вектора $\vec{c}=\overrightarrow{2a}-\overrightarrow{3b}$, якщо $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=4,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{3}.$

За формулою (11) дістанемо

$$|\vec{c}|=\sqrt{\vec{c}^{\,2}}=\sqrt{(2\vec{a}-3\vec{b})^2}=\sqrt{4\overrightarrow{a^2}-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9\overrightarrow{b^2}}=\sqrt{124}=2\sqrt{31}.$$

Вираз скалярного добутку через координати. Кут між векторами.

Нехай задано два вектори $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$, та $\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$. Знайдемо їхній скалярний добуток. Використовуючи властивості 1^0 і 3^0 скалярного добутку, дістанемо

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=a_xb_x\overrightarrow{i^2}+a_xb_y\vec{i}\cdot j+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}+a_yb_x\vec{i}\cdot j+$$
$$+a_yb_y\overrightarrow{j^2}+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}+a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j}+a_zb_z\overrightarrow{k^2}.$$

Оскільки $\vec{a},\vec{j},\vec{k}$ – попарно ортогональні орти, то $\overrightarrow{i^2}=\overrightarrow{j^2}=\overrightarrow{k^2}=1,$ $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0,$ тому

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (12)$$

Отже, скалярний добуток двох векторів, заданий координатами в прямокутній системі координат, дорівнює сумі добутків їхніх відповідних координат.

Кут φ=$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ між векторами $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$, та $\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$ визначається рівністю

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{b_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2}} \qquad (13)$$

5. Векторний добуток двох векторів

Означення і властивості векторного добутку

Векторним добутком вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який визначається такими трьома умовами:

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює $|c|=|a||b|\sin\varphi$, де φ=$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) якщо $\vec{c}\neq0$, то вектори $\vec{a}$ $\vec{b}$,і $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів

Векторний добуток позначають одним із символів:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\left[\vec{a}\vec{b}\right]=\left[\vec{a}\times\vec{b}\right].$$

Розглянемо *алгебраїчні властивості векторного добутку*.

1^0. *Антикомутативність множення:* $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a}).$

тобто від перестановки множників векторний добуток змінює знак.

2^0. *Асоціативність відносно скалярного множника λ:*

$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b});\quad \vec{a}\times\lambda\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b}).$$

3^0. *Дистрибутивність* відносно додавання векторів:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

4^0. *Векторний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори колінеарні.*

5^0. *Модуль* $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ *векторного добутку неколінеарних векторів дорівнює площині S паралелограма, побудованого на векторах* $\vec{a}$ і $\vec{b}$, *віднесених до спільного початку, тобто*

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \tag{14}$$

6^0. *Векторні добутки ортів задовольняють такі рівності:*

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0;\quad \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},$$
$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j};\quad \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

Приклад

Обчислити $\left|(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})\right|$, якщо $\left|\vec{a}\right|=3,\ \left|\vec{b}\right|=4,\ (\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{2}.$

$$\left|(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})\right|=3(\vec{a}\times\vec{a})-6(\vec{a}\times\vec{b})-(\vec{b}\times\vec{a})+2(\vec{b}\times\vec{b})=-6(\vec{a}\times\vec{b})+\vec{a}\times\vec{b}=-5(\widehat{\vec{a}\times\vec{b}});$$

$$\left|-5(\vec{a}\times\vec{b})\right|=5\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\frac{\pi}{2}=5\cdot3\times4\cdot1=60.$$

Векторний добуток двох векторів, заданих координатами.

Нехай в прямокутній системі координат задано $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$, і $\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$ векторний добуток а$\vec{b}$ визначається за формулою

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}. \tag{15}$$

Приклади

1. Знайти площу трикутника, заданого вершинами *A* (1; 2; 0), *B* (0; -2; 1), *C* (-1; 0; 2).

Площа трикутника *ABC* дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Оскільки $\overrightarrow{AB}$ =(-1; -4; 1), $\overrightarrow{AC}$ =(-2; -2; 2) і за формулою (15)

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ -1&-4&1\\ -2&-2&2\end{vmatrix}=-6\vec{i}-6\vec{k},$$

то площа $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+6^2}=3\sqrt{2}.$

6. Мішаний добуток векторів

Означення і обчислення мішаного добутку

При множенні двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вище було визначено два види добутків: скалярний, результатом якого є число $\vec{a}\cdot\vec{b}$, і векторний, результатом якого є вектор $\vec{a}\times\vec{b}$.

Множення трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ можна виконувати різними способами. Зокрема, можна утворити такі добутки:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c},\qquad (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c},\qquad (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.$$

Перший з цих добутків відповідає множення скаляра $\vec{a}\cdot\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ і не розглядається. Те саме стосується добутків $(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}$ та $(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a}.$

Результатом другого добутку є вектор, який називається ***подвійним векторним*** або ***векторно-векторним добутком*** даних трьох векторів: $\vec{d}=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}.$

Добуток $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ називається мішаним добутком векторів.

Знайдемо мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, заданих координатами:

$$\vec{a}=(a_x;a_y;a_z),\ \text{і}\ \vec{b}=(b_x;b_y;b_z)\ \ \vec{c}=(c_x;c_y;c_z)$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Властивості мішаного добутку.

1^0. *Якщо в мішаному добутку поміняти місцями які-небудь два множники, то мішаний добуток змінить знак, наприклад:*

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{a}).$$

2^0. *При циклічній перестановці множників мішаний добуток не зміниться:*

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$$

3^0. *У мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутків можна міняти місцями:*

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

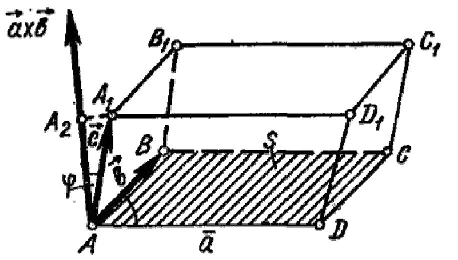


Рис. 5

4^0. *Модуль мішаного добутку* $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, *дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах* $\vec{a}$, $\vec{b}$, і $\vec{c}$, *віднесених до спільного початку:*

5^0. Якщо мішаний добуток $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ додатний, то вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву трійку, а якщо від'ємний, то ліву.

6^0. Вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю.

Приклад

Довести що точки A (0; 1; 2), B (-2; 0; -1), C(-1; 5; 8,), D (1; 6; 11) лежать в одній площині.

Точки A, B, C, D лежать в одній площині, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, компланарні. Знаходимо вектори $\overrightarrow{AB}$ =(-2; -1; -3), $\overrightarrow{AC}$ =(-1; 4; 6), $\overrightarrow{AD}$ =(1; 5; 9).

Оскільки мішаний добуток

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & -1 & -3\\ -1 & 4 & 6\\ 1 & 5 & 9\end{vmatrix}=0,$$

то за властивістю 6^0 вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, компланарні, тому задані точки лежать в одній площині.