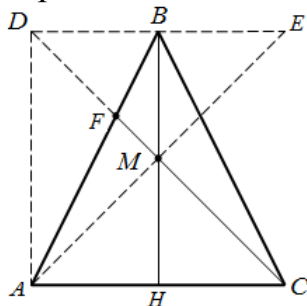


1. Через ребро основания правильной четырёхугольной пирамиды проведена плоскость, которая делит высоту пирамиды пополам. В каком отношении, считая от вершины, проведённая плоскость делит площадь боковой поверхности пирамиды?



Сначала решим следующую задачу. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC$, M – середина высоты BH , F – точка пересечения CM с AB . Найти отношение $AF : FB$.

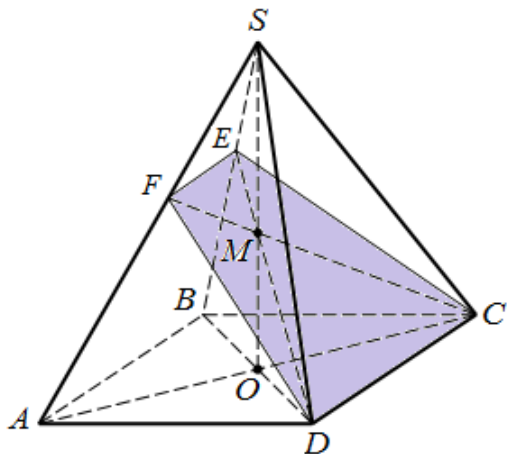
Первый способ. По теореме Менелая $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BM}{MH} \cdot \frac{HC}{CA} = 1$.

$$\frac{BM}{MH} = 1; \frac{HC}{CA} = \frac{1}{2}. \text{ Поэтому } \frac{AF}{FB} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow AF : FB = 2 : 1.$$

Второй способ. Через вершину B проводим прямую, параллельную основанию AC . Продолжаем прямую CF до пересечения с этой прямой в точке D . Через точки A и M проводим прямую, пересекающую DB в точке E .

Прямоугольные треугольники MBE и MHA с прямыми углами MBE и MHA равны, т.к. $BM = MH$ по условию, а $\angle BME = \angle AMH$ как вертикальные. Поэтому $BE = AH$ и $AM = ME$. Аналогично доказывается, что $DB = CH$, а т.к. $CH = AH$, то $DB = BE$. Т.к. $DB = BE$, а $AM = ME$, то DM и AB – медианы треугольника ABE , пересекающиеся в точке F и, значит $AF : FB = 2 : 1$.

Переходим к решению задачи.



1. Построим сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α , проходящей через ребро CD и точку M – середину высоты SO пирамиды.

$CD \in \alpha \Rightarrow C \in \alpha \cap D \in \alpha$.

$C \in \alpha \cap M \in \alpha \Rightarrow CM \in \alpha$.

Прямая CM пересекает ребро AS в точке F и, значит, $F \in \alpha$. $F \in \alpha \cap D \in \alpha \Rightarrow FD \in \alpha$.

$D \in \alpha \cap M \in \alpha \Rightarrow DM \in \alpha$.

Прямая DM пересекает ребро BS в точке E и, значит, $E \in \alpha$. $E \in \alpha \cap C \in \alpha \Rightarrow EC \in \alpha$.

$F \in \alpha \cap E \in \alpha \Rightarrow FE \in \alpha$. Сечение – четырёхугольник $CDFE$ построено. Оно отсекает от

пирамиды $SABCD$ пирамиду $SCDFE$.

2. Пусть s – площадь одной боковой грани пирамиды $SABCD$. Тогда площадь её боковой поверхности пирамиды $S_{бок.} = 4s$. Найдём площадь S_1 боковой поверхности пирамиды $SCDFE$. Т.к. пирамида правильная, то

$SA = SB = SC = SD$ и треугольники ASC и BSD – равнобедренные. Точка M – середина их общей высоты SO . Из предыдущей задачи следует, что $AF = 2FS$ и

$AS = 3FS$. Аналогично, $BS = 3ES$. Поэтому $\frac{SF}{SA} = \frac{SE}{SB} = \frac{1}{3}$, и т.к. у треугольников FSE и ASB $\angle ASB$ – общий, то $\triangle FSE \sim \triangle ASE$ по второму признаку с коэффициентом подобия $k = \frac{1}{3}$. $S_{FSE} = k^2 \cdot S_{ASB} = \frac{1}{9}s$.

У треугольников SFD и SAD с основаниями SF и SA – общая высота из вершины D , а т.к. $SF = \frac{1}{3}SA$, то $S_{SFD} = \frac{1}{3}S_{SAD} = \frac{1}{3}s$. Аналогично, $S_{SEC} = \frac{1}{3}s$.

Площадь боковой поверхности пирамиды $SCDFE$ равна сумме площадей граней FSE , SFD , SEC и SDC : $S_1 = \frac{1}{9}s + \frac{2}{3}s + \frac{2}{3}s + s = \frac{16}{9}s$.

Площадь остальной части $S_2 = 4s - \frac{16}{9}s = \frac{20}{9}s$ и $S_1 : S_2 = \frac{16}{9} : \frac{20}{9} = 4 : 5$.