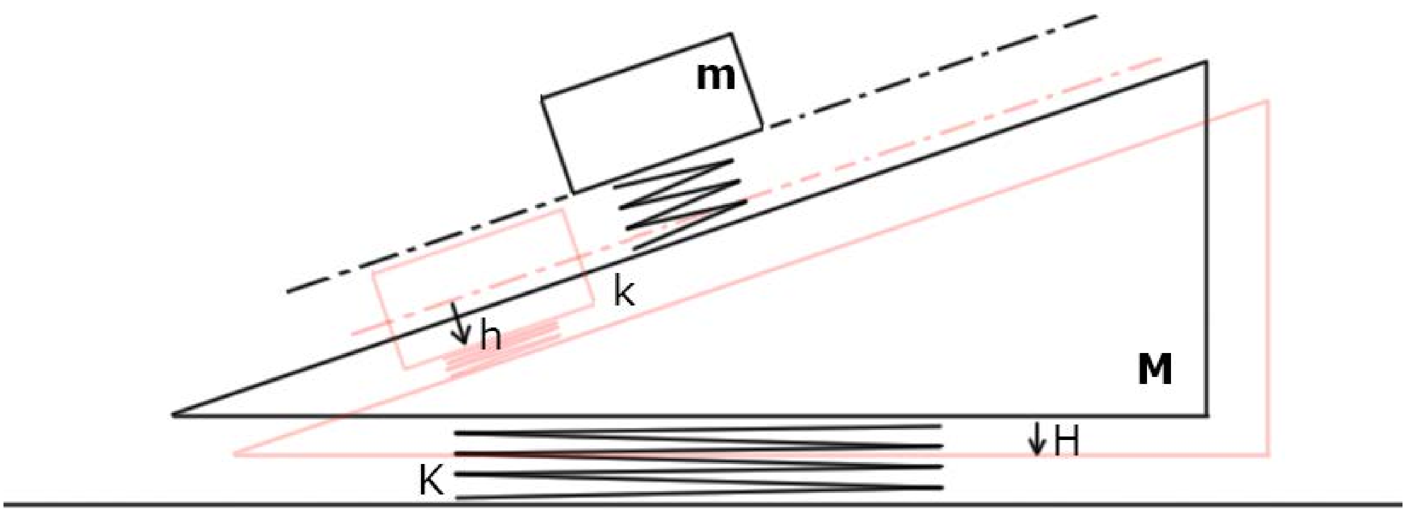
Поскольку ни одного корректного исчерпывающего решения данной задачи приведено не было. Хотелось поставить, если не точку, то хотя бы точку с запятой в противоречиях, которые она вызывает при решении. При попытке решения задачи сразу «трёх» тел получается только 4 уравнения для пяти неизвестных, и если при этом просто постулировать, что вертикальная составляющая скорости клина равна нулю после тройного мгновенного взаимодействия – то математически задачу решить можно. Но в реальности, постулат о нулевой составляющей срабатывает только в некоторых частных случаях соотношения масс и упругих свойств шара и клина. Поэтому считать такое решение исчерпывающим нет причин. Другой подход, когда соударение трёх тел разделяется на два изолированных по времени события, сначала мгновенное соударение шара и клина, а затем взаимодействие клина и земли – так же лишь приближение реального положения вещей. Поскольку, хоть событие соударения клина с землёй и начинается позже, оно гарантированно начинается до того, как шар заканчивает взаимодействие с клином. Как будет показано ниже – эти два решения ограничивают сверху и снизу множество всех решений задачи с реальными упругими свойствами участников взаимодействия.

Простейшая возможность устранить эту неопределённость хотя бы приближённо – заключается в построении элементарной упругой модели, представленной на иллюстрации. Элементы системы можно ограничить, так чтобы они двигались без вращения и поперечной деформации пружин, для этого достаточно



подложить под клин невесомый скейт с поперечным штырём, на который через пружину насадить клин с отверстием. На аналогичный скейт можно насадить и верхнее тело, так чтобы скейт изначально двигался плашмя к верхней поверхности клина. Считая соударение достаточно быстрым – мы не учитываем гравитацию, поскольку импульс и работа, которые будут сообщены системе за малое время взаимодействия – тем ничтожнее, чем меньше этот интервал времени. Так что наиболее точно это решение будет приближено к телам с высоким модулем упругости, к стальным и т.п. Короче говоря, решаем задачу так, как будто силы всех взаимодействий направлены в горизонтальной плоскости, без гравитации. Введём два параметра.

h – величина уменьшения расстояния от верхнего тела до клина по сравнению с недеформированной длиной верхней пружины. Фактически, если h > 0 – то это величина сжатия верхней пружины, а когда h < 0 – то это расстояние от нижнего конца верхней пружины до клина, взятой с обратным знаком. Поперечная составляющая скорости верхнего тела ***относительно клина*** будет как раз – производной h’. Она направлена вниз при h’ > 0 и наоборот. Очевидно, что как только начинает выполняться условия h < 0 – то текущее взаимодействие верхнего тела и клина заканчивается.

H – величина уменьшения расстояния от клина до поверхности по сравнению с недеформированной длиной нижней пружины. Фактически, если H > 0 – то это величина сжатия нижней пружины, а когда H < 0 – то это расстояние от нижнего конца нижней пружины до поверхности, взятой с обратным знаком. Вертикальная составляющая скорости клина будет как раз – производной H’. Она направлена вниз при H’ > 0 и наоборот. Очевидно, что как только начинает выполняться условие H < 0 – то текущее взаимодействие клина с поверхностью заканчивается.

Если выполняются сразу два условия { h < 0 и H < 0 } , то это означает, что все тела взаимно удаляются, т.е. взаимодействие, пусть даже до того многоударное в условиях отсутствия гравитации закончено полностью и бесповоротно.

Составим уравнения взаимодействия для H(t) и h(t).

Поперечная составляющая ускорения клина выражается, очевидно, как: $a_{\perp} = -\frac{K}{M} H \cos\alpha + \frac{k}{M} h$;

Тогда: $h'' + a_{\perp} = -\frac{k}{m} h$; $\iff$ $h'' = -k\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) h + \frac{K}{M} H \cos\alpha$;

И очевидно, что: $H'' = -\frac{K}{M} H + \frac{k}{M} h \cos\alpha$;

Два последних дифференциальных уравнения в виде нелинейной системы – представляют очень сложную для анализа и решения математическую задачу. Вместо того, чтобы их решать в общем или даже частном виде аналитически – лучше просто завершим их решение численно с начальными условиями:

$$h_o = 0 \ ; \ \ h'_o = v_o \ ; \ \ H_o = 0 \ ; \ \ H'_o = 0 \, ;$$

Перед применением численных методов – преобразуем и упростим эту систему. Обозначим:

$$m = \mu M \, ; \quad \iff \quad \mu = \frac{m}{M} \, ; \qquad\qquad k = \xi K \, ; \quad \iff \quad \xi = \frac{k}{K} \, ;$$

таким образом, что масса клина M – будет условно эталонно единичной, а масса верхнего тела будет выражаться через массу клина как μ . И аналогично K – будет условно эталонно единичной жёсткостью, а жёсткость верхнего тела будет выражаться через неё как ξ . Тогда получим систему:

$$h'' = \frac{K}{M}\left(-\xi \left[1 + \frac{1}{\mu}\right] h + H \cos\alpha\right) \, ;$$

$$H'' = \frac{K}{M}\left(-H + \xi h \cos\alpha\right) ;$$

Поскольку наша цель – конечная горизонтальная составляющая скорости клина, то величина $\frac{K}{M}$ не играет для нас сколь-либо ценной роли, так как она просто представляет собой квадрат некой характерной частоты колебательного движения в системе. Чтобы не утруждать себя доказательствами на этот счёт, вдаваясь в тонкости общего решения системы данных дифференциальных уравнений, представляющего собой сумму двух асинхронных гармоник – просто заметим, что при математическом моделировании данной системы с учётом $\frac{K}{M}$, её решение относительно конечной скорости клина в итоге оказывается независимым от $\frac{K}{M}$. Итак, ничто нам не мешает просто положить $\frac{K}{M} = 1\text{Гц}^2$. Тогда систему можно переписать так:

$$h'' = -\xi\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)h + H\cos\alpha \ ;$$

$$H'' = -H + \xi h\cos\alpha \ ;$$

Смоделировав численно во времени данное уравнение, мы получим решение в виде $V = V(\xi, \mu, \alpha)$.

Это будет функция от трёх переменных, которую будет очень сложно визуализировать, поскольку это будет трёхмерная поверхность в 4-мерном пространстве. Чтобы решение всё-таки хоть как-то можно было осознать, не вдаваясь глубоко совершенно во все тонкости ситуации – просто попробуем сбросить один из этих параметров ξ, сопоставив его с параметром μ. Будем считать, что во сколько раз верхнее тело легче, во столько же раз меньше и его жёсткость. Нельзя сказать, что это очень точное предположение, но на данной глубине уточнений – такое приближение оправдано, с учётом того, что параметр ξ оказывает заметное влияние только на своих очень больших и очень малых значениях (это показывают пробы с численным моделированием).

Тогда систему, с учётом равенства $\xi = \mu$ можно переписать так:

$$h'' = -(1 + \mu)h + H\cos\alpha \ ;$$

$$H'' = -H + \mu h\cos\alpha \ ;$$

Пружины, приведённые в данной модели как эквиваленты упругих свойств несвязанных тел – могут только сжиматься, но не могут растягиваться, так что далее будем считать, что все силы упругости имеют ненулевое значение только при положительных h и H. Т.е. будем использовать выражения типа:

$k\frac{h+|h|}{2}$, $K\frac{H+|H|}{2}$, $\xi\frac{h+|h|}{2}$ и т.п.

Далее проведём численное моделирование в формате:

$\Delta t = 0.000001$ сек .

$h_o = 0$; $h'_o = v_o$; $H_o = 0$; $H'_o = 0$;

$V_o = 0$; $V'_o = 0$; – горизонтальная составляющая скорости и ускорения клина вначале.

Циклическая функция до тех пор, пока($h > 0$ или $H > 0$ **)**

{

$h_{next} = h_{prev} + h'\Delta t + \frac{h''(\Delta t)^2}{2}$; $H_{next} = H_{prev} + H'\Delta t + \frac{H''(\Delta t)^2}{2}$;

$h'_{next} = h'_{prev} + h''\Delta t$; $H'_{next} = H'_{prev} + H''\Delta t$; $\boldsymbol{V_{next} = V_{prev} + V'\Delta t}$;

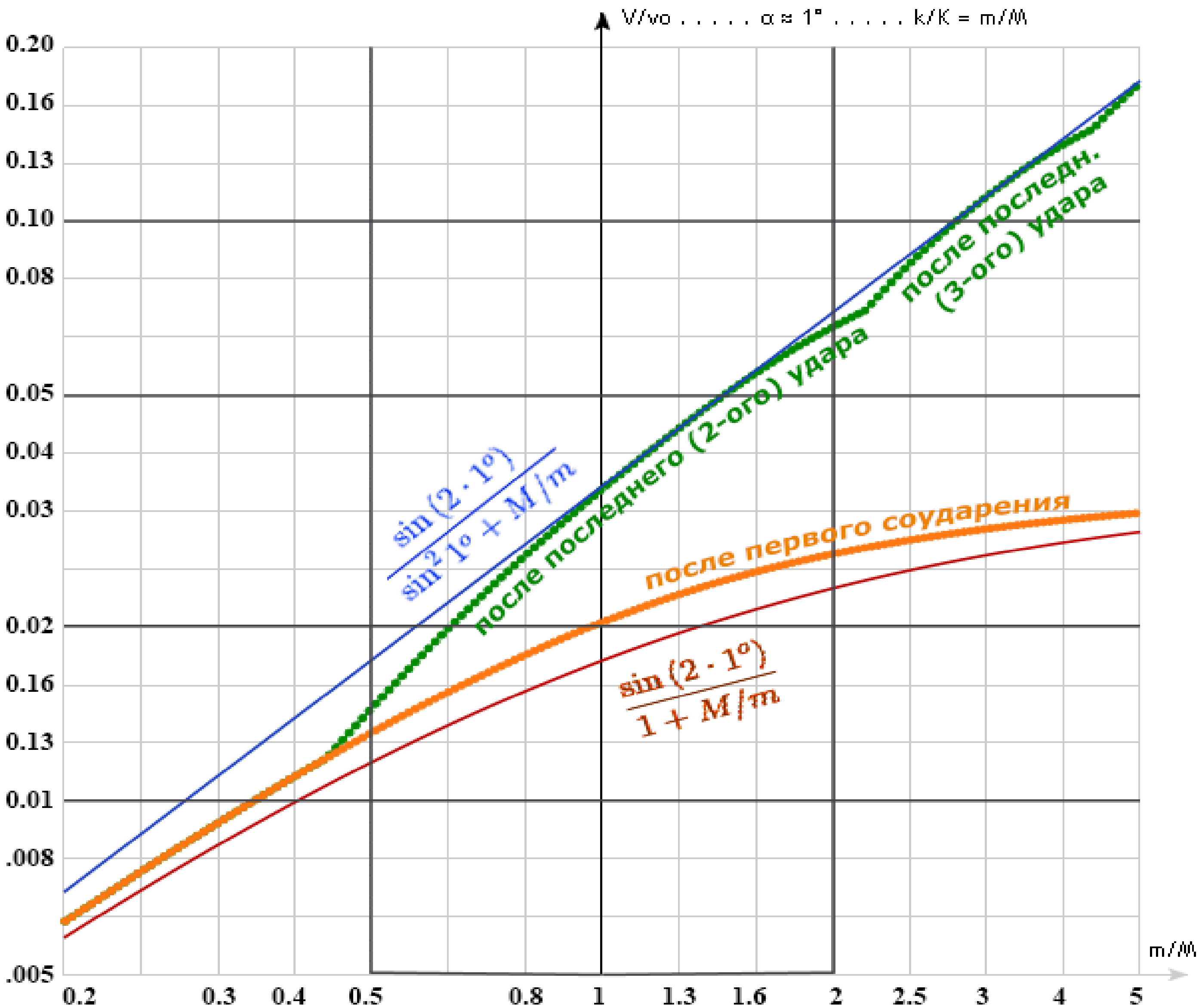
$h'' = -(1+\mu)\frac{h+|h|}{2} + \frac{H+|H|}{2}\cos\alpha$; $H'' = -\frac{H+|H|}{2} + \mu\frac{h+|h|}{2}\cos\alpha$; $V' = \frac{h+|h|}{2}\sin\alpha$;

Если($h > 0$ в первый раз – то это завершение первоо удара **)** $\boldsymbol{V_{\text{перв}} = V}$;

}

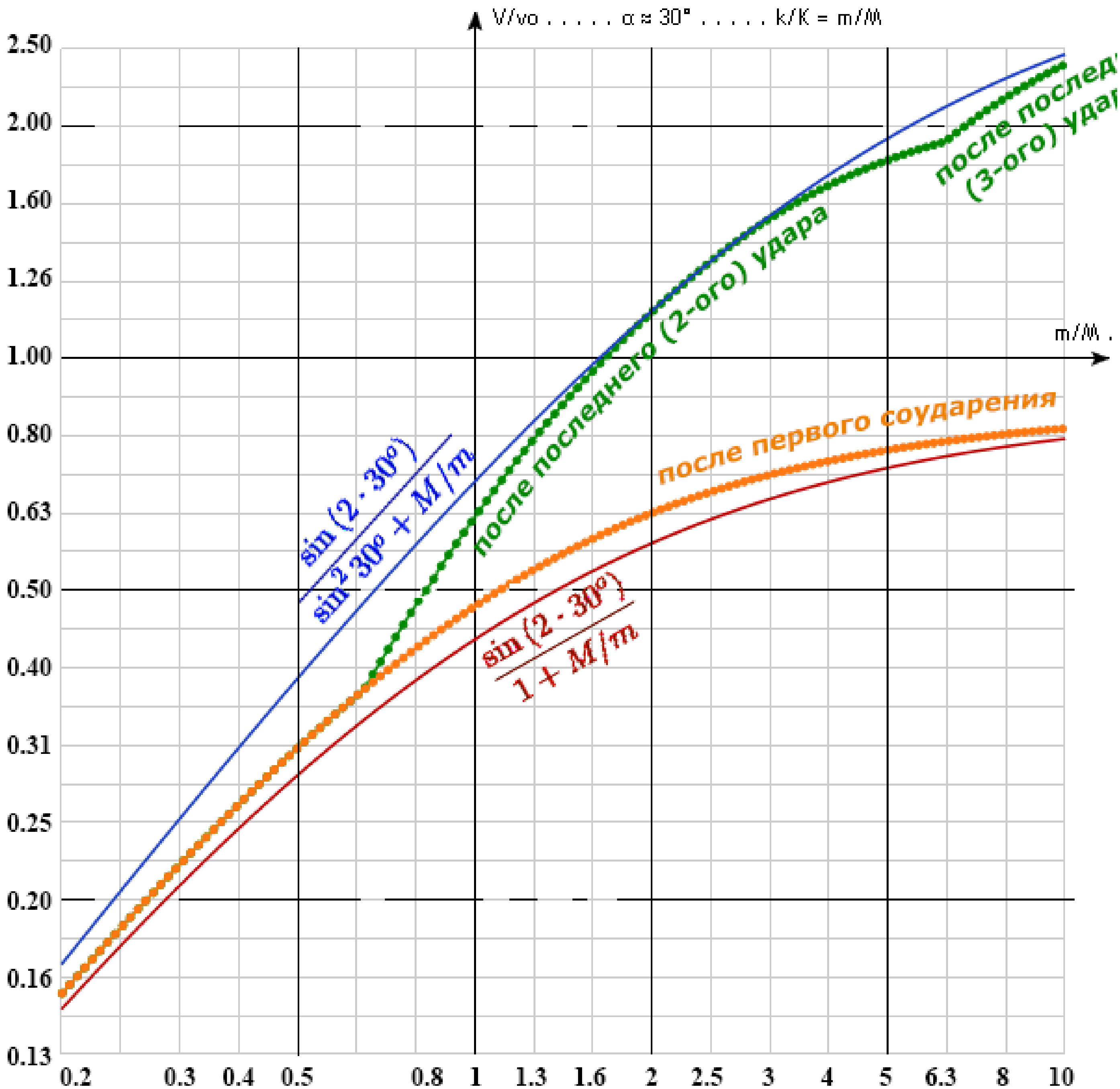
И проводим эти итерации для разных значений μ с шагом $\mu_{next} = 1.04 \cdot \mu_{prev}$ в lg-шкале.

И вот какие получаются интересные результаты:

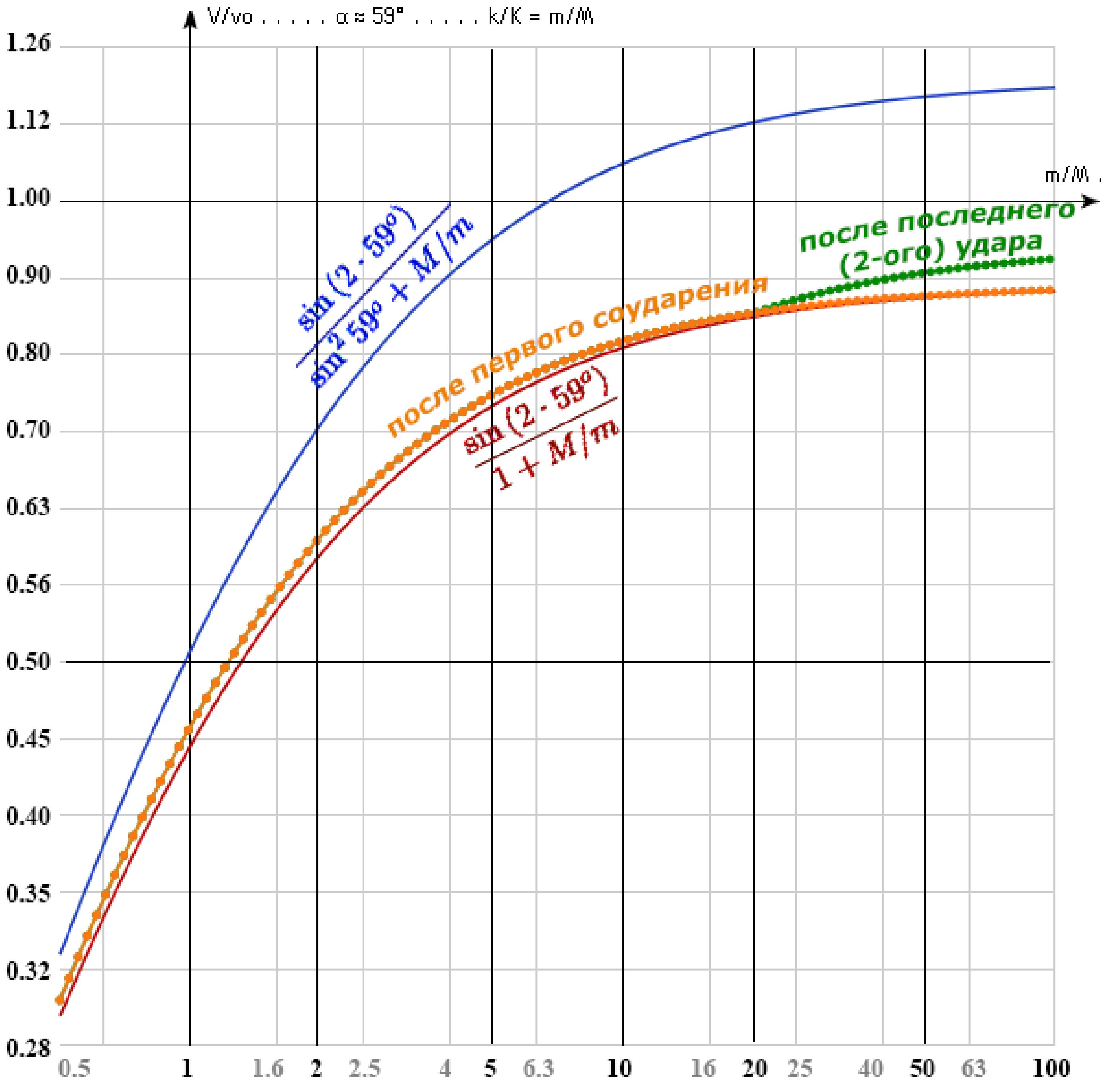


Первый график построен для угла наклона клина $\alpha = 1^o$. Верхняя синяя кривая соответствует решению «задачи трёх тел» с постулатом $V_y = 0$. Нижняя красная кривая соответствует решению с разделением столкновения на два последовательных мгновенных события. Именно между этими двумя решениями, как ни удивительно, оказываются «зажаты» все численные решения при различных значениях μ .

Оранжевый набор решений показывает горизонтальную составляющую скорости клина по окончании первого столкновения шара и клина. Как можно видеть из графика для $\alpha = 1^o$, до соотношения масс $\frac{m}{M} \approx 0.45$ – столкновение вообще только одно. И в этом случае численное решение тяготеет к красной кривой. При более тяжёлых шарах – последовательных (очень близких) столкновений оказывается уже 2, 3 и .п. И начиная с $\frac{m}{M} \approx 0.5$ – численное решение начинает больше тяготеть к синей кривой.



Пояснения к графику для $\alpha = 30^o$ – были бы почти полным повторением описания первого графика. Так что нет смысла повторяться. Третий график для угла $\alpha = 59^o$ – представляет уже несколько больший интерес, поскольку второе соударение начинается уже только с массы шара – в 20 раз (!) больше массы клина. При массе шара $m < 20M$ – соударение будет только одно и в результате у клина будет горизонтальная составляющая скорости, почти полностью совпадающая с красным решением. Начиная с угла $\alpha \geq 60^o$ – мне не удалось найти значения массы шара (точно известно, что $m < 10^6 M$), при котором происходило бы повторное соударение шара и клина. Так что величина горизонтальной составляющей конечной скорости клина выражается оранжевой кривой, которая полностью совпадает с красной. Можно предположить, что для угла $\alpha = 60^o = \frac{\pi}{3}$ – это может быть доказано аналитически.



Как можно видеть, оказывается, что оба решения: и $\frac{\sin 2\alpha}{1+M/m}$, и $\frac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha+M/m}$ – являться в некотором смысле верными. Эти решения описывают предельные кривые, соответствующие некоторому соотношению упругих свойств соударяющихся тел. И они – суть супремум и инфинум.

$$\boldsymbol{V_{inf} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + M/m}} \ ; \qquad \boldsymbol{V_{sup} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha + M/m}} \ ;$$

При малых углах и значениях массы шара не более половины массы клина – горизонтальная составляющая конечной скорости клина оказывается примерно между $\boldsymbol{V_{inf}}$ и $\boldsymbol{V_{sup}}$ – и при этом примерно вдвое ближе к $\boldsymbol{V_{inf}}$.При массах шара в половину массы клина и более у шара и клина происходит не одно, а два или даже больше быстрых последовательных соударений, в результате которых клин приобретает скорость, довольно близкую к $\boldsymbol{V_{sup}}$, а при некоторых соотношениях масс и упругостей и равную $\boldsymbol{V_{sup}}$, когда вертикальная скорость клина как раз и обнуляется. Тем не менее, именно по окончания первого удара – горизонтальная составляющая скорости клина оказывается равна как раз $\boldsymbol{V_{inf}}$.

При приближении угла клина к $45^o - 60^o$ порог относительной массы шара (т.е. величины μ), начиная с которого случается два и более последовательных удара и уходом решения к $\boldsymbol{V_{sup}}$ – значительно возрастает. При 59^o такой порог уже составляет двадцатикратную массу шара по отношению к клину. А для углов 60^o и более такой порог не отыскивается вовсе, так что оказывается, что при больших углах соударение шара и клина будет чётко одиночным, а решением будет тяготеть к $\boldsymbol{V_{inf}}$.