Задана пирамида с вершинами A(0, 6, 1), B(3, 2, -1), C(5, 3, 2), D(1, 1, -2)

1. Нахождение длин ребер и координат векторов

Вектор АВ={xB-xA, yB-yA, zB-zA}={3, -4, -2}  
Длина ребра АВ=5.385164807134504  
  
Вектор BC={xC-xB, yC-yB, zC-zB}={2, 1, 3}  
Длина ребра ВC=3.7416573867739413

Вектор СВ имеет обратные знаки: = {-2, -1, -3}  
  
Вектор АC={xC-xA, yC-yA, zC-zA}={5, -3, 1}  
Длина ребра АC=5.916079783099616

Вектор СА имеет обратные знаки: = {-5, 3, -1}  
  
Вектор АD={xD-xA, yD-yA, zD-zA}={1, -5, -3}  
Длина ребра АD=5.916079783099616  
  
Вектор BD={xD-xB, yD-yB, zD-zB}={-2, -1, -1}  
Длина ребра BD=2.449489742783178  
  
Вектор CD={xD-xC, yD-yC, zD-zC}={-4, -2, -4}  
Длина ребра CD=6

2. Площади граней

Площадь грани АВС может быть найдена как половина площади параллелограмма построенного на векторах АВ и АС.  
Площадь этого параллелограмма равна модулю векторного произведения векторов АВ и АС  
  
[AB{x1, y1, z1} ; AC(x2, y2, z2}]= {a1, a2, a3}, где a1, a2, a3 вычисляются по формулам:  
a1=y1\*z2-y2\*z1; a2=x1\*z2-x2\*z1; a3=x1\*y2-y1\*x2;   
Получаем: [AB ; AC]={-10, -13, 11}  
  
Площадь грани АВС = 9.874208829065749  
  
Аналогично:  
Площадь грани АВD = 6.59545297913646  
Площадь грани АСD = 15.297058540778355  
Площадь грани BCD = 2.23606797749979

3. Объем пирамиды

Для нахождения объема пирамиды надо найти объем параллелепипеда, построенного на гранях АВ, АС и АD и поделить его на 6  
Объем этого параллелепипеда равен модулю векторного произведения векторов AB, AC и AD  
(AB{x1, y1, z1} ; AC(x2, y2, z2} ; AD{x3, y3, z3})= x3\*a1+y3\*a2+z3\*a3   
Объем пирамиды равен: 11 / 3 = 3.6666666666666665

4. Длины высот пирамиды

Чтобы найти длину высоты, опущенной, допустим, на грань АВС, надо использовать формулу объема пирамиды, известную из геометрии: V=1/3\*Sосн\*H  
В этой формуле нам известны и объем и площадь соответствующей грани. Высота может быть рассчитана по формуле: H=3V/Sосн  
Высота, опущенная на грань ABC равна: 1.1140133037920334  
Высота, опущенная на грань ABD равна: 1.6678156958735875  
Высота, опущенная на грань ACD равна: 0.7190924955066748  
Высота, опущенная на грань BCD равна: 4.919349550499537

5. Угол между ребрами BD и BC

Угол между ребрами ищется как угол между соответствующими векторами - с использованием скалярного произведения.  
BC{x4, y4, z4}\*BD{x5, y5, z5}=x4\*x5+y4\*y5+z4\*z5=|BC|\*|BD|\*cos(alfa)  
Получаем: -8=9.16515138991168cos(alfa)  
Откуда: cos(alfa)=-0.8728715609439696  
Угол между BD и BC равен 150.7940677526006 градусов  
sin(BD,BC)=0.48795003647426655  
  
Аналогично:  
Угол между AB и AC равен 38.30650259405705 градусов; sin(AB,AC)=0.6198680933892069  
Угол между AB и AD равен 24.458833429774216 градусов; sin(AB,AD)=0.4140393356054125

6. Угол между ребром AD и гранью ABC

Угол между ребром гранью будет равен 90 градусов минус угол между гранью и нормалью к плоскости.  
Нормаль к плоскости ABC уже была найдена в пункте 2 как векторное произведение  
[AB ; AC]={a1, a2, a3}  
[AB ; AC]={-10, -13, 11}  
Используя скалярное произведение, получаем:   
AD{1, -5, -3}\*N{-10, -13, 11}=|AD|\*|N|\*cos(beta)  
Получаем: 22=116.83321445547922cos(beta)  
Откуда: cos(beta)=0.1883026167048017  
Угол между ребром AD и гранью ABC равен 10.853743397204838 градусов, синус этого угла равен 0.1883026167048017

7. Угол между гранями BDC и ABC

Угол между гранями равен углу между нормалями к этим граням  
Нормаль к грани ABC уже найдена: N={-10, -13, 11}  
Нормаль к грани BDC ищется как векторное произведение векторов BD и BC  
[BD{x4, y4, z4} ; BC{x5, y5, z5}] = {n1, n2, n3}  
n1=y4\*z5-y5\*z4; n2=-x4\*z5+x5\*z4; n3=x4\*y5-y4\*x5  
[BD ; BC] = {2, -4, 0}  
Используя скалярное произведение, получаем:   
N{-10, -13, 11}\*N2{2, -4, 0}=|N|\*|N1|\*cos(gamma)  
Получаем: 32=88.31760866327846cos(gamma)  
Откуда: cos(gamma)=0.36232865092627065  
Угол между гранями BDC и ABC равен 68.75672450427966 градусов, синус этого угла равен 0.9320504003099558