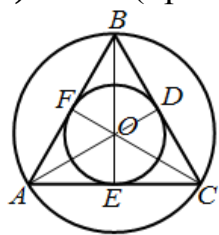


Сторона правильного n -угольника равна a . Вычислите площадь описанного около него и вписанного в него круга, если $n = 3; 4; 6$.

Для любого правильного многоугольника окружность, ограничивающая круг, описанный около этого многоугольника, проходит через его вершины, а окружность, ограничивающая круг, вписанный в правильный многоугольник, касается его сторон. Центры описанного и вписанного кругов совпадают. R – радиус описанного круга, r – вписанного, S – площадь описанного круга, s – вписанного, $S = \pi R^2$, $s = \pi r^2$.

- 1) $n = 3$ (правильный треугольник). Центр O описанного и вписанного кругов находится в точке пересечения медиан AD , BE и CF (они же – высоты и биссектрисы) треугольника ABC , D , E и F – точки касания вписанного круга со сторонами BC , AC и AB соответственно. $OA = OB = OC = R$; $OD = OE = OF = r$, $AB = BC = AC = a$.

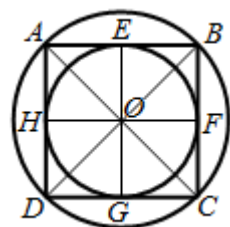


$$R = OA = \frac{2}{3}AD; AD = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$S = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{3a^2}{9} = \frac{\pi a^2}{3}.$$

$$r = OD = \frac{1}{3}AD = \frac{a\sqrt{3}}{6}; s = \pi r^2 = \pi \cdot \frac{3a^2}{36} = \frac{\pi a^2}{12}.$$

- 2) $n = 4$ (квадрат). Центр O описанного и вписанного кругов находится в точке пересечения диагоналей AC , BD . E , F , G , H – точки касания вписанного круга со сторонами AB , BC , CD и AD соответственно.

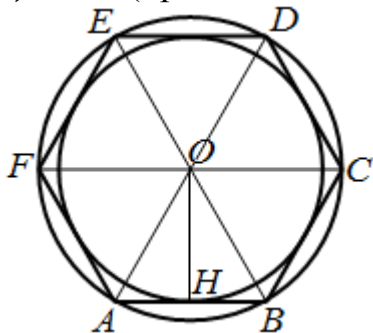


$$AB = BC = CD = AD = a. AC = a\sqrt{2}, OA = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \text{ т.е.}$$

$$OA = OB = OC = OD = R = \frac{a\sqrt{2}}{2}; S = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{2a^2}{4} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

$$OE = OF = OG = OH = r = \frac{a}{2}; s = \pi r^2 = \frac{\pi a^2}{4}.$$

- 3) $n = 6$ (правильный шестиугольник).



Радиусы описанного круга OA и OB равны стороне правильного треугольника AOB , а т.к. сторона этого треугольника является стороной правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной a , то $R = a$, $S = \pi R^2 = \pi a^2$.

Радиус вписанного круга равен высоте OH правильного треугольника AOB , т.е. $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. $s = \pi r^2 = \frac{3\pi a^2}{4}$.

Итак: $n = 3$, $S = \frac{\pi a^2}{3}$, $s = \frac{\pi a^2}{12}$; $n = 4$, $S = \frac{\pi a^2}{2}$, $s = \frac{\pi a^2}{4}$; $n = 6$, $S = \pi a^2$, $s = \frac{3}{4}\pi a^2$.