

$$\sin^2 x * \cos^2 y dy - \cos 2x dy = 0, y(0) = \frac{\pi}{4}$$

Условие записано с ошибкой. Наиболее вероятно, что правильно так:

$$\sin^2 x \cos^2 y dx - \cos 2x dy = 0, y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Тогда  $\sin^2 x \cos^2 y dx = \cos 2x dy$ ;  $\frac{\sin^2 x dx}{\cos 2x} = \frac{dy}{\cos^2 y}$ ;  $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos 2x} = \int \frac{dy}{\cos^2 y}$ .

Найдём  $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{(1 - \cos 2x) dx}{\cos 2x}$ . Для этого сделаем замену  $\operatorname{tg} x = t$ . Тогда

$$\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; 1 - \cos 2x = 1 - \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = \frac{1 + t^2 - 1 + t^2}{1 + t^2} = \frac{2t^2}{1 + t^2};$$

$$\frac{1}{\cos 2x} = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}; \frac{1 - \cos 2x}{\cos 2x} = \frac{2t^2(1 + t^2)}{(1 + t^2)(1 - t^2)} = \frac{2t^2}{1 - t^2}; x = \operatorname{arctg} t; dx = \frac{dt}{1 + t^2}.$$

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{(1 - \cos 2x) dx}{\cos 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{2t^2 dt}{(1 - t^2)(1 + t^2)} = \int \frac{t^2 dt}{(1 - t)(1 + t)(1 + t^2)}.$$

Здесь уже «запахло» не школьной математикой!

$$\frac{t^2}{(1 - t)(1 + t)(1 + t^2)} = \frac{A}{1 - t} + \frac{B}{1 + t} + \frac{Ct + D}{1 + t^2} = \frac{A(1 + t)(1 + t^2) + B(1 - t)(1 + t^2) + (Ct + D)(1 - t^2)}{(1 - t)(1 + t)(1 + t^2)}.$$

Равенство числителей – тождественное, т.е.

$$t^2 = A(1 + t)(1 + t^2) + B(1 - t)(1 + t^2) + (Ct + D)(1 - t^2) \quad (1) \text{ при всех значениях } t.$$

При  $t = 0$  имеем  $A + B + D = 0$ , при  $t = 1$ :  $4A = 1$  или  $A = \frac{1}{4}$ , при  $t = -1$ :  $4B = 1$ ,  $B = \frac{1}{4}$ .

Т.к.  $A + B + D = 0$ , то  $D = -\frac{1}{2}$ . Подставим найденные значения  $A, B, D$  и  $t = 3$  в (1),

$$\text{чтобы найти } D: \frac{1}{4}(1 + 3)(1 + 9) + \frac{1}{4}(1 - 3)(1 + 9) + \left(3C - \frac{1}{2}\right)(1 - 9) = 9;$$

$$10 - 5 - 24C + 4 = 9 \Leftrightarrow 9 - 24C = 0 \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\text{Значит, } \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos 2x} = \int \frac{t^2 dt}{(1 - t)(1 + t)(1 + t^2)} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1 - t} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1 + t} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1 + t^2} =$$

$$= -\frac{1}{4} \ln|1 - t| + \frac{1}{4} \ln|1 + t| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} \right| - \frac{x}{2} + C.$$

Отсюда, т.к.  $\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \operatorname{tgy}$ ,  $\operatorname{tgy} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} \right| - \frac{x}{2} + C$ , а т.к.  $y(0) = \frac{\pi}{4}$ , то

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 - \operatorname{tg} 0}{1 + \operatorname{tg} 0} \right| - \frac{0}{2} + C; C = 1 \text{ и}$$

$$\boxed{y = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} \right| - \frac{x}{2} + 1 \right)}.$$

Но возможно также, что правильно:  $\sin^2 x \cos^2 y dy - \cos 2x dx = 0$ ,  $y(0) = \frac{\pi}{4}$ . В этом

случае  $\sin^2 x \cos^2 y dy = \cos 2x dx$ ;  $\cos^2 y dy = \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx$ ;  $\frac{1 + \cos 2y}{2} dy = \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx$ ;

$\frac{1}{2} \int (1 + \cos 2y) dy = \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx + C$ ;  $\frac{y}{2} + \frac{1}{4} \sin 2y = 2 \int \frac{\cos 2x}{1 - \cos 2x} dx$ . В предыдущем вари-

анте, делая замену  $\operatorname{tg} x = t$ , мы нашли, что  $\frac{1 - \cos 2x}{\cos 2x} = \frac{2t^2}{1 - t^2}$ . Поэтому

$$\frac{\cos 2x}{1 - \cos 2x} = \frac{1 - t^2}{2t^2}, \text{ и т.к. } dx = \frac{dt}{1 + t^2},$$

$$\text{то } 2 \int \frac{\cos 2x}{1 - \cos 2x} dx = 2 \int \frac{1 - t^2}{2t^2(1 + t^2)} dt = \int \frac{1 - t^2}{t^2(1 + t^2)} dt = \int \frac{dt}{t^2(1 + t^2)} - \int \frac{dt}{1 + t^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{1 + t^2} - \int \frac{dt}{1 + t^2} = -\frac{1}{t} - 2 \arctgt + C = -\operatorname{ctg} x - 2x + C. \text{ Здесь я воспользовался}$$

тем, что  $\frac{1}{t^2(1 + t^2)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{1 + t^2}$ . Отсюда

$$\frac{y}{2} + \frac{1}{4} \sin 2y = -\operatorname{ctg} x - 2x + C;$$

$$\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} = -\operatorname{ctg} 0 + C, \text{ но } \operatorname{ctg} 0 \text{ не существует, а значит и решение, удовлетво-}$$

ряющее условию  $y(0) = \frac{\pi}{4}$  не существует.