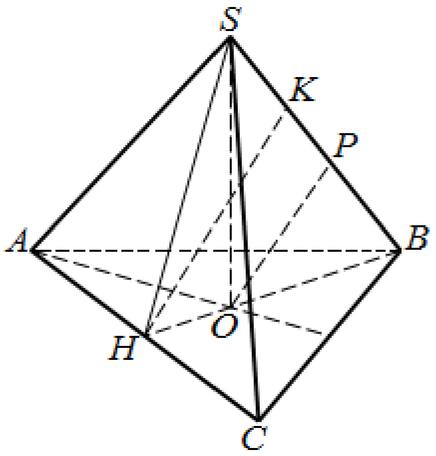
С основания высоты правильной треугольной пирамиды на боковое ребро опущен перпендикуляр равный 6. Двугранный угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен 60 градусов. Найти объем.



Если я правильно понял, просто-напросто в условии задачи было пропущено подчёркнутое мной слово!

Обозначим буквой a длину стороны основания пирамиды ($AB = BC = AC = a$). SO – высота пирамиды, O – её основание, $OP \perp BS$, $OP = 6$.

BH – высота основания к стороне AC (Все три высоты основания в правильной треугольной пирамиде проходят через точку O). $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $OH = \dfrac{1}{3}BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

SH – апофема боковой грани ASC, и $\angle SHB$ – линейный угол двугранного угла между боковой гранью и основанием пирамиды, т.е. $\angle SHB = 60°$, $SO = OH \cdot \mathrm{ctg}60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a}{2}$.

Т.к. площадь основания ABC $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, то объём пирамиды

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$

Задача свелась к тому, чтобы найти сторону основания a.

$BO = \dfrac{2}{3}BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; По теореме Пифагора $BS^2 = BO^2 = SO^2 = \dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{7a^2}{12}$.

$SH = \dfrac{OH}{\cos 60°} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} : \dfrac{1}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Проведём $HK \perp BS$, $HK \parallel OP$, $\Delta HKB \sim OPB$,

$\dfrac{HK}{OP} = \dfrac{BH}{BO} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow HK = \dfrac{3}{2}OP = 9$. По теореме Пифагора $SK = \sqrt{SH^2 - HK^2}$;

$$SK = \sqrt{\frac{a^2}{3} - 81} = \sqrt{\frac{a^2 - 243}{3}} = \frac{\sqrt{3a^2 - 729}}{3};$$

$$KB = \sqrt{BH^2 - HK^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - 81} = \frac{\sqrt{3a^2 - 324}}{2};$$

$$BS = SK + KB = \frac{\sqrt{3a^2 - 729}}{3} + \frac{\sqrt{3a^2 - 324}}{2} = \frac{2\sqrt{3a^2 - 729} + 3\sqrt{3a^2 - 324}}{6};$$

$$\left(\frac{2\sqrt{3a^2 - 729} + 3\sqrt{3a^2 - 324}}{6}\right)^2 = \frac{7a^2}{12};$$

$$\frac{4(3a^2 - 729) + 9(3a^2 - 324) + 12\sqrt{(3a^2 - 729)(3a^2 - 324)}}{36} = \frac{7a^2}{12};$$

$$39a^2 - 5832 + 12\sqrt{(3a^2 - 729)(3a^2 - 324)} = 21a^2;$$

$$12\sqrt{(3a^2-729)(3a^2-324)}=5832-18a^2;\ 2\sqrt{(3a^2-729)(3a^2-324)}=972-3a^2$$

$$4(9a^4-3159a^2+236196)=944784-5832a^2+9a^4;$$

$$36a^4-12636a^2+944784=944784-5832a^2+9a^4;$$

$$27a^4-6804a^2=0;\ a^2-252=0;\ a=6\sqrt{7};$$

$$V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}=\frac{6^3\cdot 7\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{24}=63\sqrt{21}.$$