

1. Вычислите:

а) $2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12};$

Применяем формулу синуса двойного угла

$$2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{12} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = 0,5$$

б) $\left(\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} \right) \left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \right)$

Применяем формулу разности квадратов

$$\left(\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} \right) \left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \right) = \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$$

Применяем формулу косинуса двойного угла

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. Вычислите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,8$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Вспользуемся основным тригонометрическим тождеством

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - 0,8^2} = \pm 0,6$$

По условию угол лежит в 4-й четверти. В этой четверти синус отрицателен, поэтому берем полученный результат со знаком минус.

$$\sin \alpha = -0,6$$

Применяя формулу синуса двойного угла, вычисляем

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot (-0,6) \cdot 0,8 = -0,96$$

3. Докажите равенство $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$, если $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Выполняем преобразования правой части

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}$$

Исходя из условия

$$\cos^2 \alpha \neq 0$$

следовательно, можно сократить на эту величину

$$\frac{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$$

Применяя основное тригонометрическое тождество и формулу косинуса двойного угла, получаем

$$\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{1} = \cos 2\alpha$$

Что и требовалось доказать.

4. Вычислите: а) $\sin 22^\circ 30'$;

Применяем формулу квадрата синуса

$$\sin 22^\circ 30' = \sin 22.5^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos(2 \cdot 22.5^\circ)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = 0.5\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

б) $\cos 15^\circ$.

Применяем формулу квадрата косинуса

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos(2 \cdot 15^\circ)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = 0.5\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

5. Вычислите $\sin \frac{\alpha}{2}$ и $\cos \frac{\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = -\frac{1}{8}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

Все части неравенства делим на 2

$$\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$$

Угол принадлежит второй четверти, следовательно

$$\sin \frac{\alpha}{2} > 0; \quad \cos \frac{\alpha}{2} < 0$$

Применяем формулу квадрата синуса

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{1}{8}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством

$$\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = -\sqrt{\frac{16 - 9}{16}} = -\frac{1}{4}\sqrt{7} = -0.75\sqrt{7}$$