

<http://znaniya.com/task/20624983>

Приведите уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и постройте ее. Укажите координаты вершин, фокусов. Напишите уравнения директрисы и асимптот, если они есть. Вычислите эксцентриситет кривой. $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 7 = 0$

$$9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 7 = 0 \quad (1)$$

РЕШЕНИЕ:

Общее уравнение кривой 2-го порядка.

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (2)$$

Соответственно простейший вид уравнения кривой 2-го порядка.

$$A'x'^2 + C'y'^2 + F' = 0 \quad (2a)$$

где x', y' – новые координаты,

A', C', F' – новые коэффициенты

У нас :

$$A = 9$$

$$B = 0$$

$$C = -4 \quad (3)$$

$$D = -18/2 = -9$$

$$E = -16/2 = -8$$

$$F = -7$$

Сразу мы можем определить тип кривой, вычислив её инвариант:

$$AC - B^2 = 9 \cdot (-4) - 0 = -36 < 0 \quad (4)$$

Инвариант меньше нуля, значит это кривая гиперболического типа.

Вводим новые координаты \tilde{x}, \tilde{y} (преобразование параллельного переноса)

$$x = \tilde{x} + x_0 \quad (5)$$

$$y = \tilde{y} + y_0$$

При этом подбираем параметры x_0, y_0 такими чтобы они являлись решением системы (чтобы занулить коэффициенты при \tilde{x}, \tilde{y}).

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 = -D \\ Bx_0 + Cy_0 = -E \end{cases} \quad (6)$$

Для наших коэффициентов эта система имеет вид

$$\begin{cases} 9x_0 = 9 \\ -4y_0 = 8 \end{cases} \quad (7)$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -2 \end{cases} \quad (8)$$

Подставляем выражения (5) с найденными x_0, y_0 (8) в (1). Получаем.

$$9(\tilde{x}+1)^2 - 4(\tilde{y}-2)^2 - 18(\tilde{x}+1) - 16(\tilde{y}-2) - 7 = 0$$

Раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые

$$9(\tilde{x}^2 + 2\tilde{x} + 1) - 4(\tilde{y}^2 - 4\tilde{y} + 4) - 18\tilde{x} - 18 - 16\tilde{y} + 32 - 7 = 0$$

$$9\tilde{x}^2 + 18\tilde{x} + 9 - 4\tilde{y}^2 + 16\tilde{y} - 16 - 18\tilde{x} - 16\tilde{y} + 7 = 0$$

$$9\tilde{x}^2 - 4\tilde{y}^2 = 0$$

Итак получаем простейший вид уравнения

$$9\tilde{x}^2 - 4\tilde{y}^2 = 0 \quad (9)$$

(Даже поворот координат не потребовался)

Далее распишем (9) так

$$(3\tilde{x} + 2\tilde{y})(3\tilde{x} - 2\tilde{y}) = 0 \quad (9a)$$

Уравнение (9a) распадается на два

$$3\tilde{x} + 2\tilde{y} = 0 \quad (10)$$

$$3\tilde{x} - 2\tilde{y} = 0 \quad (11)$$

Два уравнения прямых

Выражение (10) можно записать в виде:

$$\tilde{y} = -\frac{3}{2}\tilde{x} \quad (12)$$

Выражение (11) можно записать в виде:

$$\tilde{y} = \frac{3}{2}\tilde{x} \quad (13)$$

ОТВЕТ:

Канонического уравнение

$$9\tilde{x}^2 - 4\tilde{y}^2 = 0$$

Это две прямых

$$\tilde{y} = \frac{3}{2}\tilde{x}$$

$$\tilde{y} = -\frac{3}{2}\tilde{x}$$